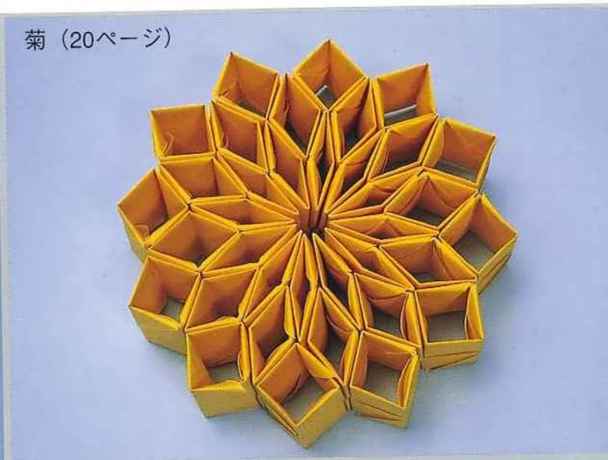
バラと折り紙と数学と

川崎敏和 著

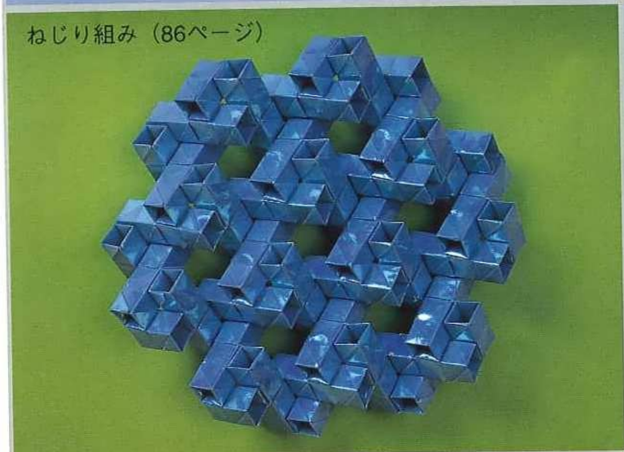
森北出版株式会社

ブロック折り紙　「冬景色」－領主の館と教会を囲む中世の町並み－

バラ（115ページ）



菊（20ページ）



ねじり組み（86ページ）

亀甲組み（99ページ）

変形折り鶴（143ページ）
（はた形）

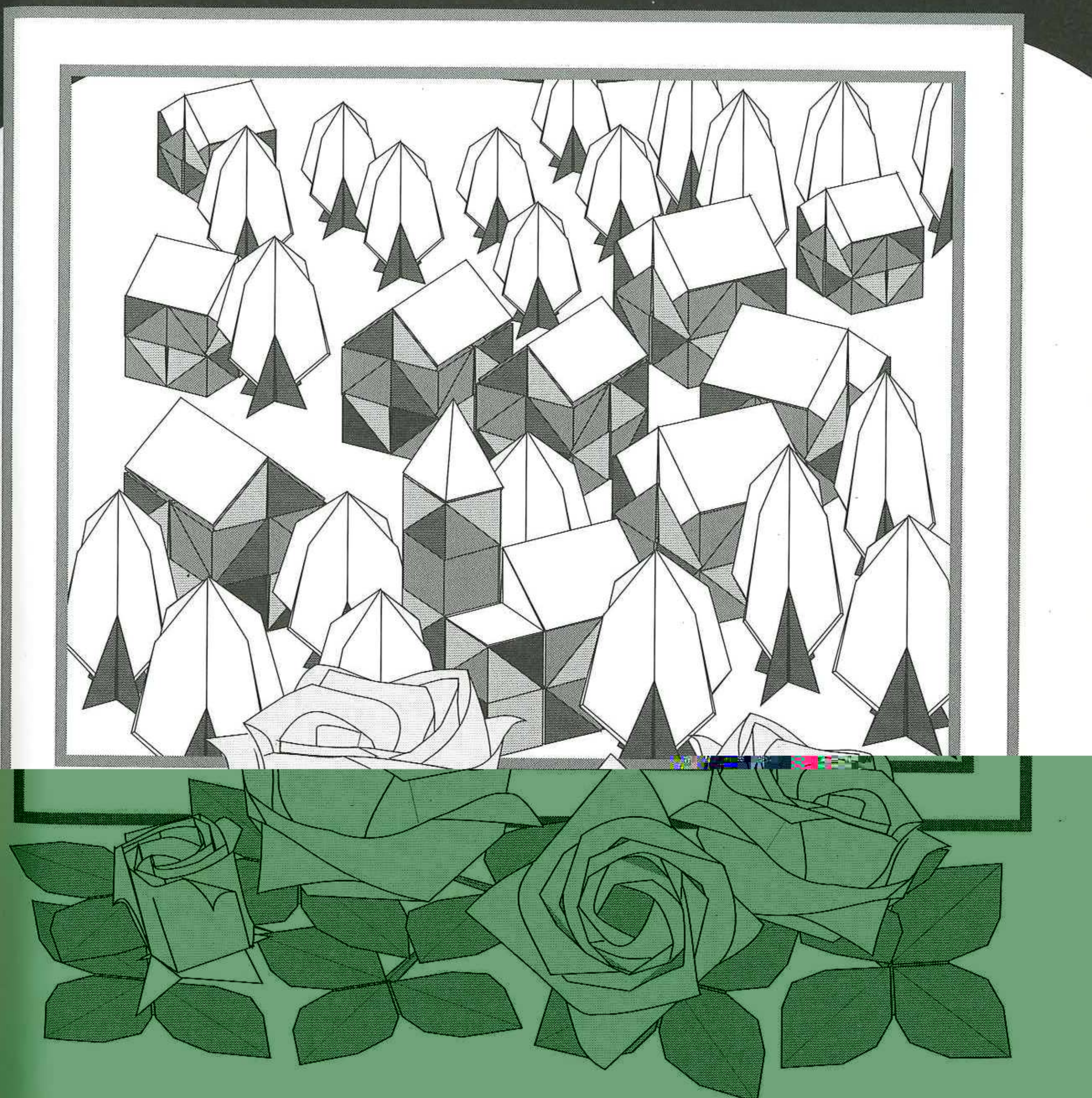
変形折り鶴（143ページ）
（開いたはた形）

変形折り鶴（143ページ）
（亀鶴）

変形折り鶴（143ページ）
（連なった亀鶴）

バラと折り紙と数学と

川崎敏和著



森北出版株式会社

待ってました！

はじめに，自己紹介をさせていただくことをお許し願います．高校生時代（１５才～１８才）に折り紙と出会い，以来４０年熱中し続けている者，それが私です．

出会い，恋をし，結婚した妻との付き合いは，間もなく３０年目．はじめの１０年くらいは楽しいことばかり．・・・しかし，１５年，２０年，２５年と月日の経過にともない，ケンカもし，口を聞かないような事も2度や3度にとどまりません．

ところが，折り紙と付き合って４０年，かつて1度として情熱の冷めたことがありません．もっとも，もし折り紙が単に叙情的な造形だけを求めるものであったとしたら，情熱の衰退があったかも知れません．

しかし幸いなことに，折り紙とは実に幅広い興味の広がりがあるのだということを教えてくれる，幾多の同好者との出会いに恵まれました．かくて４０年の付き合いを経て，なお一層情熱をかきたてられているのですが，そのような，さらなる情熱を与えてくれるすばらしい作品を次々と見せてくれるお一人が，この本の著者である川崎敏和さんなのです．

私はこれまで，とてもたくさんの折り紙の紹介書を刊行してきましたが，その中で「よく書けた」と思う本の多くが，実は川崎さんの傑作に接することが出来たことを動機として生まれています．その傑作の筆頭に揚げられるのが，世に「カワサキ・ローズ（川崎さんの薔薇の花)」として知られるものです．この本の中でもそのカワサキ・ローズは，私が紹介させていただいたものが（さらに磨きをかけられて）載せられています．これは決して易しい作品ではありません．けれども，本書はとてもシンプルな作品からスタートしていますから，まずそれらにより（折り紙の基本）をマスターされ，それからチャレンジしてください．そしてこの上なく見事なこの薔薇の花を，あなたの手の上に咲かせることが出来たなら，そのときあなたは間違いなく（上級者）として認められるでしょう！

ところで，川崎さんのご本業は数学者です．かくて本書の後半には，川崎さんならではの，「折り紙の底に潜む数学上の真理」についての解説が示されます．それらをご覧になると，皆さんは大きな驚きに捉われることでしょう．前記した（興味の大きな広がり）の，その最大のものがこのことです．ともあれ，本書は長い間多数の愛好者が待ち望んでいた，川崎さんの初のご著書です．正に「待ってました！」と歓声の揚がるものなんです．本書により，私と同じような（折り紙熱愛者）が多数誕生するだろうと，心からそう確信しています．

１９９８年5月

折り紙作家　笠原邦彦

まえがき

筆者が折り紙と深く関わるようになって四半世紀になります．ここ数年強く感じている事があります．折り紙の持つ可能性の大きさです．夢中になって紙を折る人々の姿を見る度，折り紙は教育に使える，もっと多くの人に折り紙の楽しさを知ってもらえたらと思います．

本書は独立した3部構成になっています．興味のある所から読みはじめてください．また練習問題を用意しています．折り紙の初心者や愛好者の方々は理解度のチェックとして，学校の先生方は授業で利用してください．特に第Ｉ部ブロックの問題は「対称性」理解の手助けになるように作りました．マスターすれば，数学の問題をセンス良く解くのに役立つことでしょう．

第Ⅱ部では，切り込みを入れることなく，１枚の紙で立体的なバラを折ります．バラで使われる「ねじり折り」や「ねじり折りの立体化」などの特殊技法は，平織りや結晶折り紙の基礎となる重要なものです．是非マスターしてください．

第Ⅲ部は折り紙の幾何学です．使っている数学は中学の幾何程度（三平方の定理や三角形の内心など）です．数学が苦手な方でも，第４章折り鶴の変形の中の展開図を折ってみれば，折り鶴の奥深さやおもしろさが感じ取れることでしょう．

１９９８年5月

筆者

目　　次

第Ⅰ部　ブロック

第１章　ブロックと家

第2章 幾何造形

第II部 バラ

第III部 折り紙の幾何学

第1章 はじめに

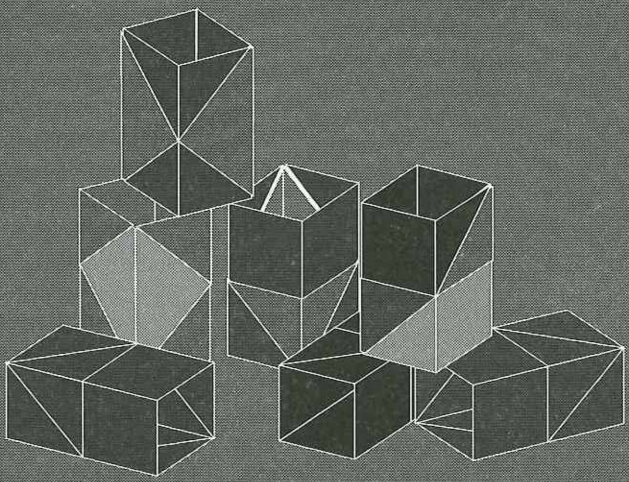
第2章 平坦条件

第3章 山折り線と谷折り線

第4章 折り鶴の幾何学

第Ⅰ部　ブロック

第１章　ブロックと家

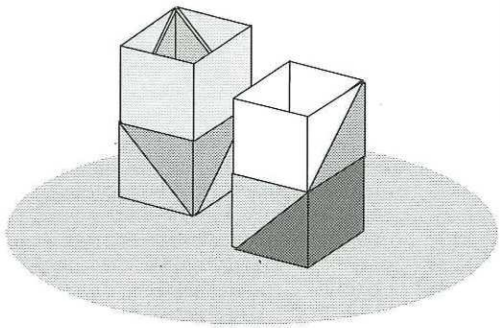


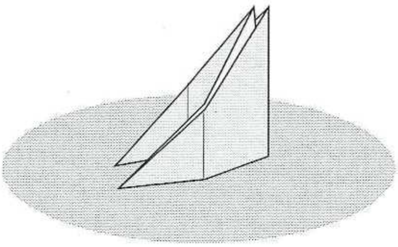
1.1 ブロック

基本ブロックＡ
円筒ブロックＣ
西川ブロックＢ
はた形ブロックＫ

基本ブロックA (P2×4)

まず基本となるブロックを折りましょう．ブロックは２種類４個の部品（**くちばし，半くちばし**）を組んで作ります．普通の色紙（**P1**=15cm角）を使うと，高さ13.6cm，幅奥行き6.8cmの大きなブロック（四角い筒）になります．市販されている千羽鶴用の色紙（**P2**=7.5cm角）で作ると手頃な大きさになります．

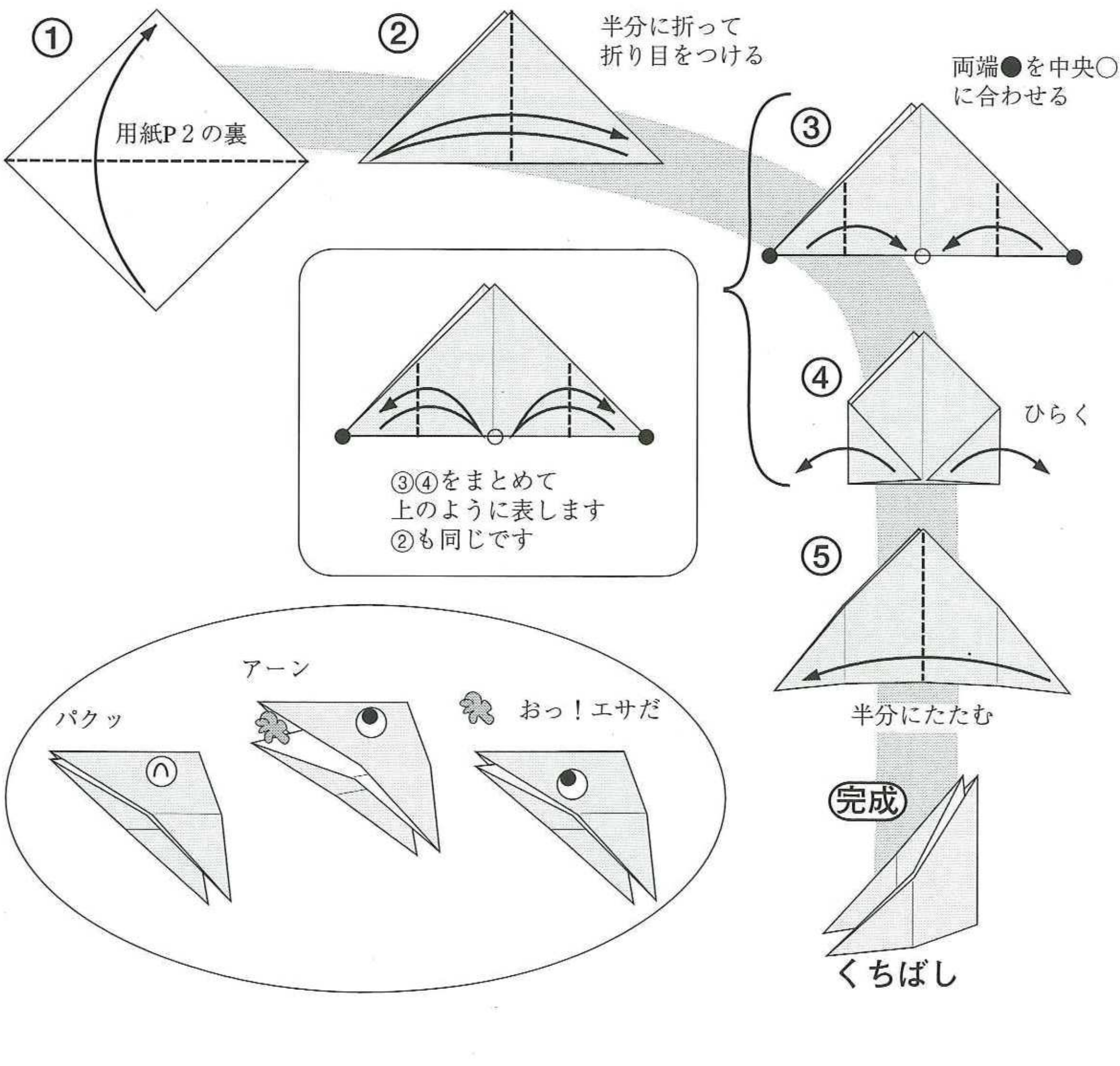




くちばし (P2)

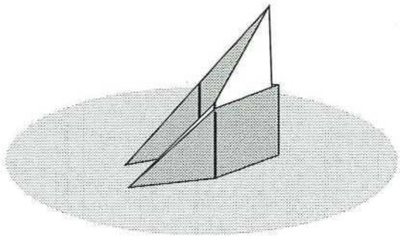
基本ブロックAの部品です．

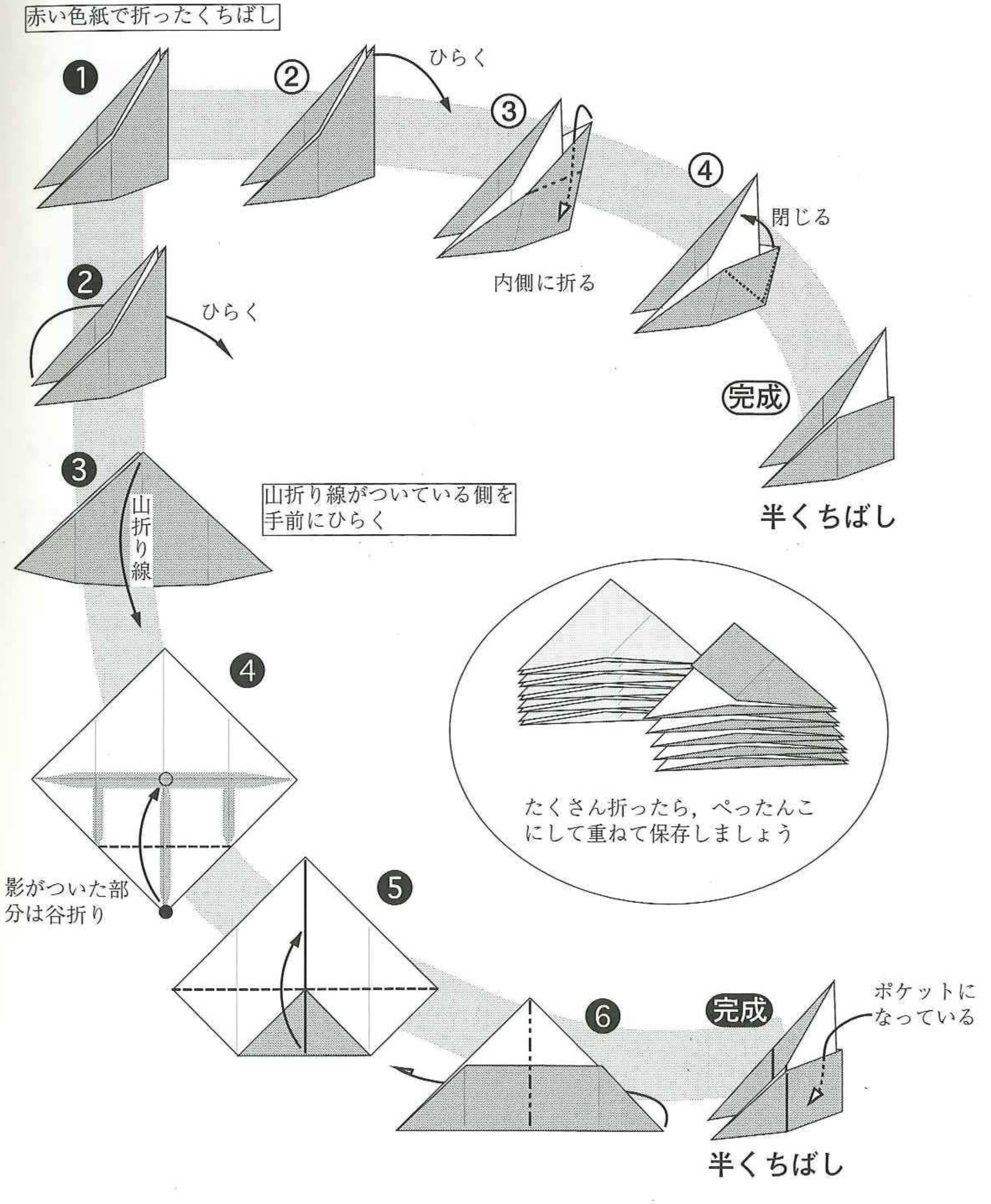
最初は黄色い紙で折る



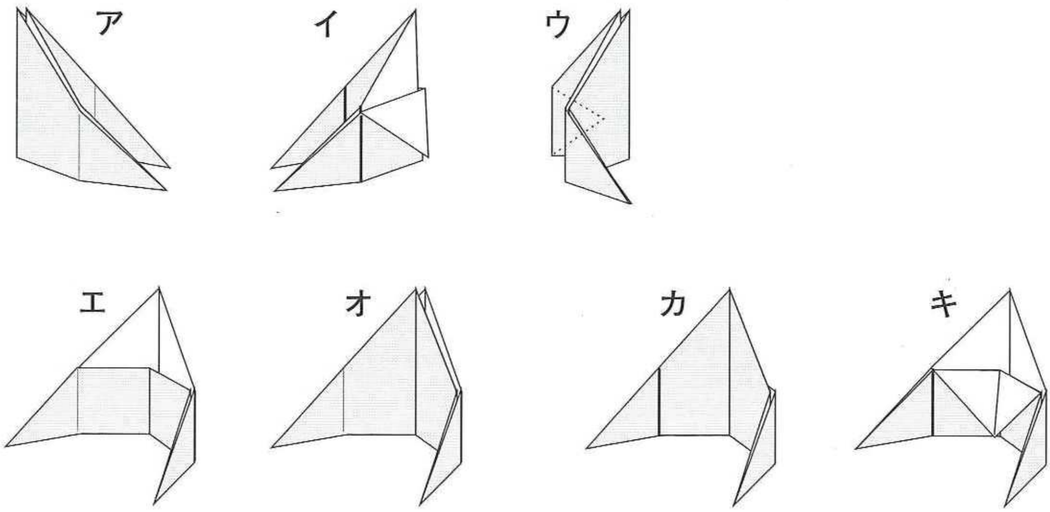
半くちばし (P2)

くちばしに似た部品です．❶～❻のように折りますが，❶②～④の方が全体の様子がわかりやすいでしょう．

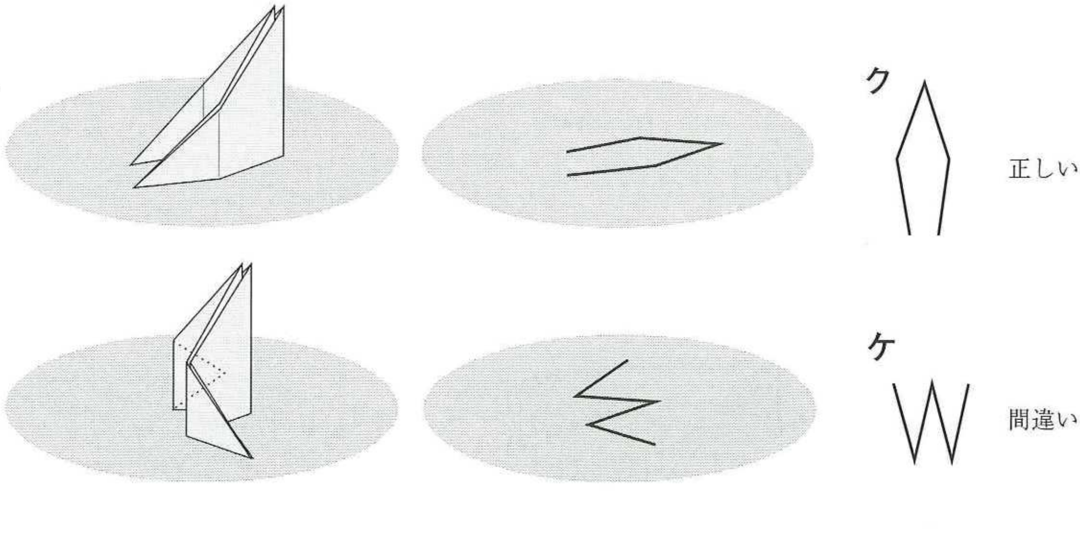




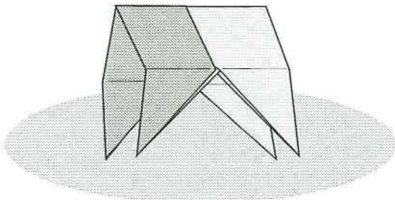
問題1-1 下図の中から，正しい**くちばし**と**半くちばし**を選んでください．また間違っているものは，どこが悪いか説明してください．



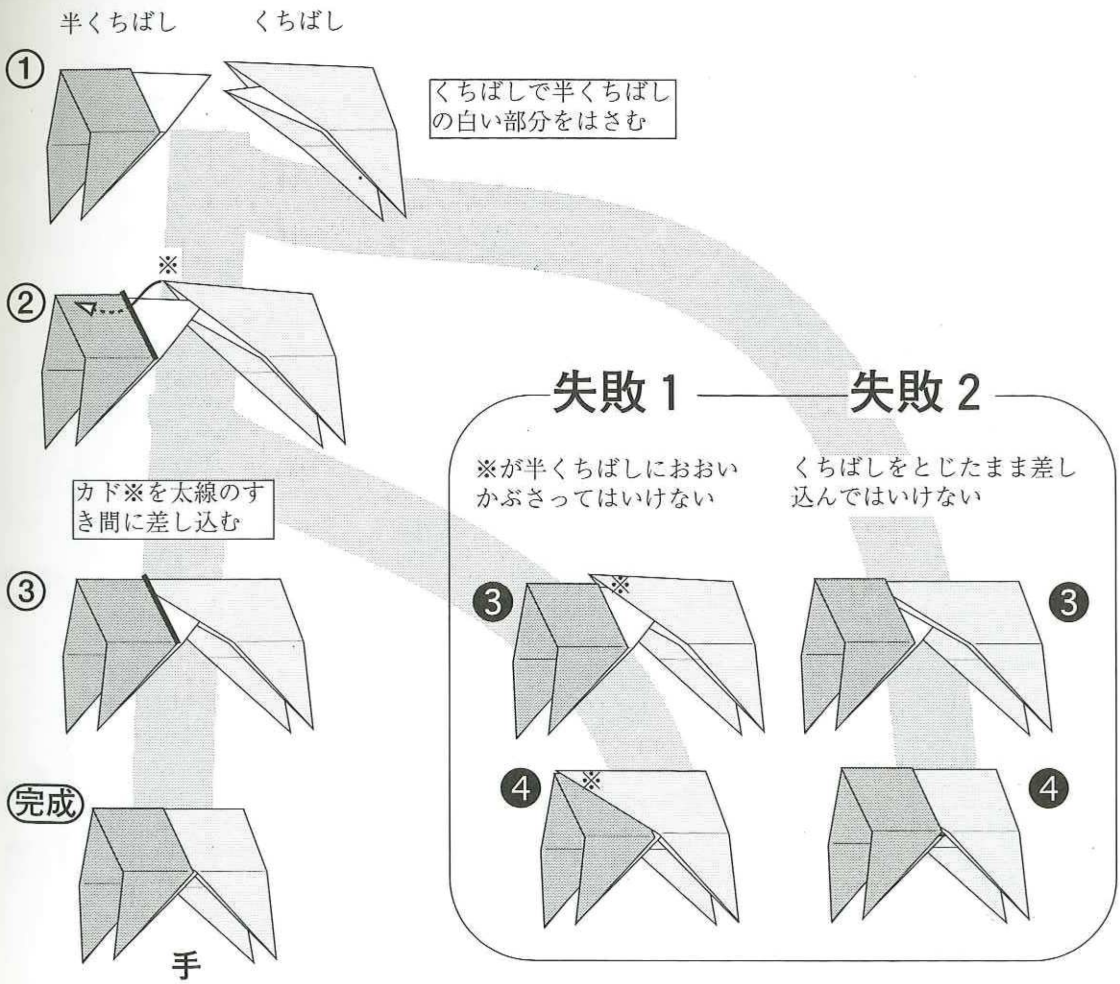
答え 正しいくちばしは**ア**と**オ**．**オ**は**ア**を少し開いたものです．正しい半くちばしは**カ**です．**カ**は**オ**に似ていますが，よく見ると裏側にポケットがあるので半くちばしです．
その他は間違いです．**イ**は前ページ❹の折りで山谷を逆にしたものです．**ウ**は2ページくちばし③の山谷が逆になったものです．**ウ**を下から見ると，下図**ケ**のようにWになっています．正しくは**ク**です．**エ**と**キ**はポケットが内側にあるので間違いです．

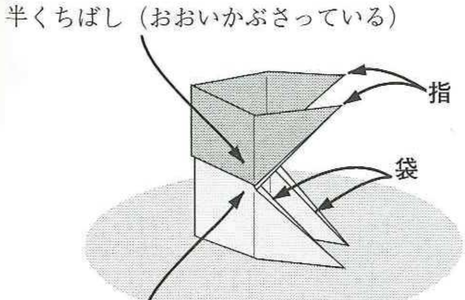


手 (くちばし＋半くちばし)



くちばしと半くちばしが，お互いをはさみ合うように組みます．このとき**失敗 1** のように※部分が外に出ないように注意してください．また**失敗 2** のようにくちばしをとじたまま差し込んではいけません．

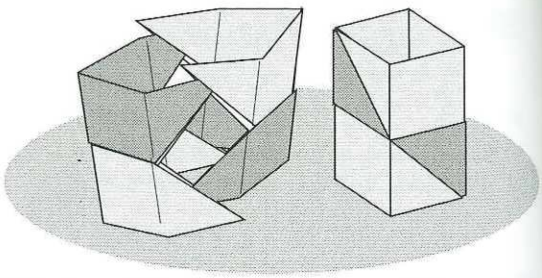


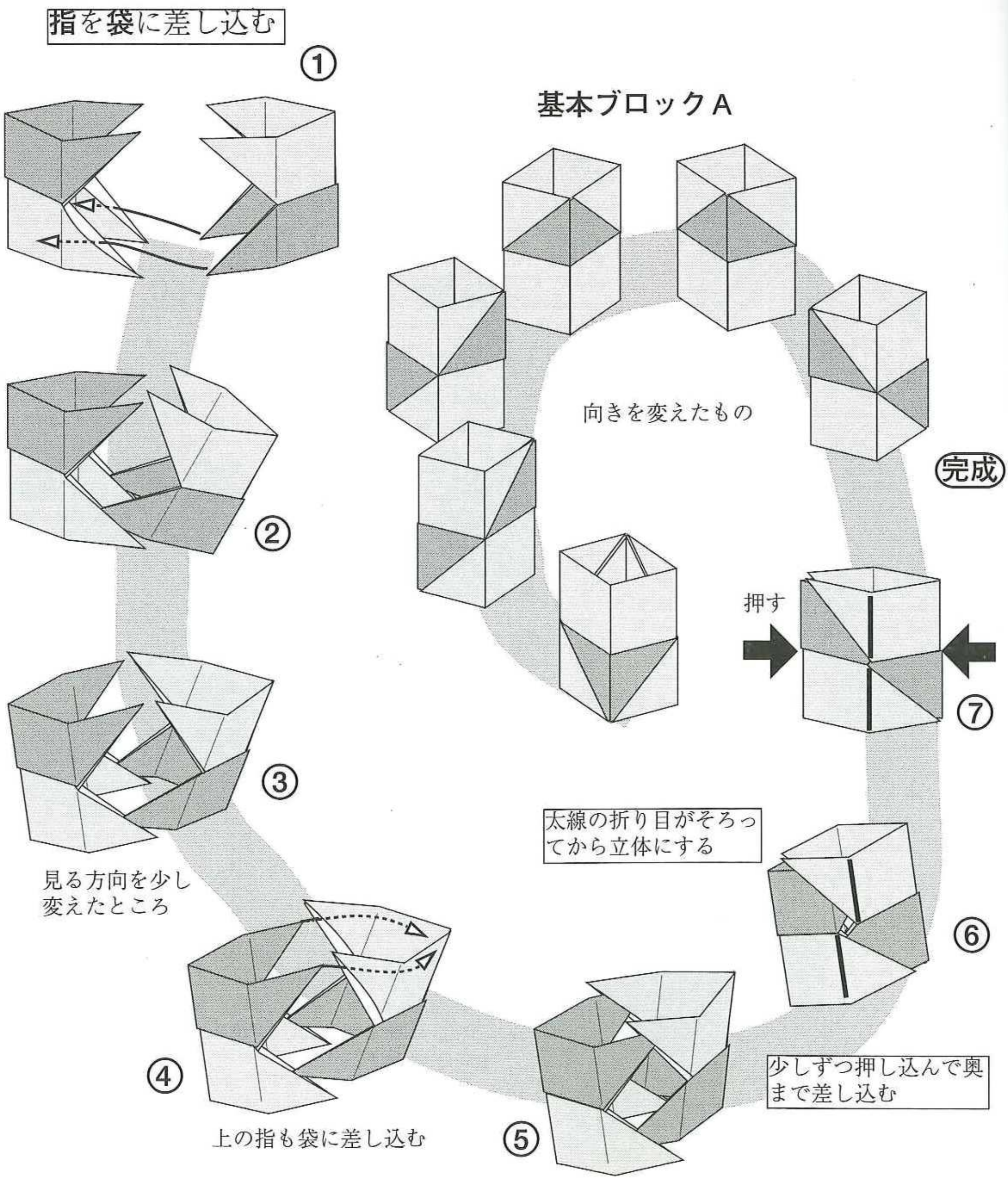


手の 4 つカドは袋状になっています．くちばしのカドを**袋**，半くちばしのカドを**指**と呼ぶことにします．手を 2 つ組んで基本ブロック A を作るとき指を袋に差し込みます

基本ブロックAの組立

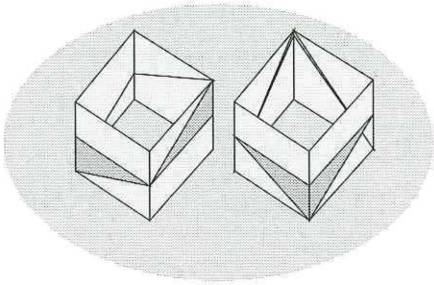
（手×2）
手を２つ組んで**基本ブロックA**を作ります．
必ず**指**（半くちばしのカド）を**袋**（くちばしのカド）に差し込んでください．





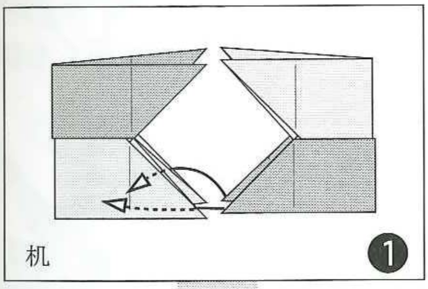
チェック

ブロックができたら中を覗いてください．
本文の指示に従って黄色い**くちばし**と赤い**半くちばし**で組んでいれば，中は黄色一色です．
もし赤い面が見えたらどこかで間違っています．
5ページ手の失敗1，失敗2と
指（半くちばしのカド）を
袋（くちばしのカド）に入れる
に注意して組み直してください．

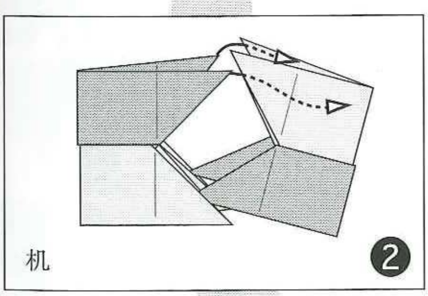


うまく組めないときは

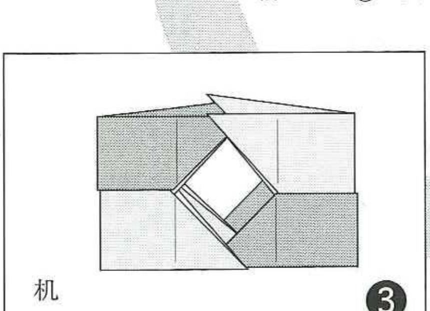
前ページのように宙に浮かして組まないでください．
平たくした手を 机の上に置いて 指を1つずつ丹念に差し込んでください．



前ページ①と同じ

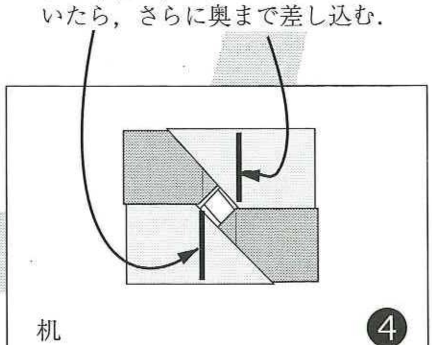


前ページ④と同じ



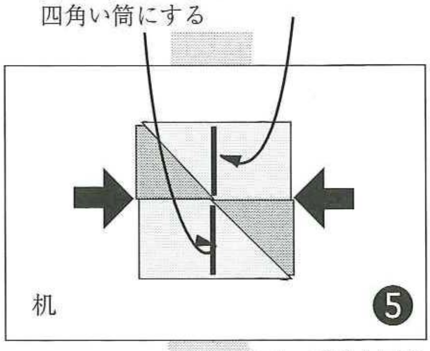
前ページ⑤と同じ

太線の折り目が一致しているかどうか確認し，下図のようにずれていたら，さらに奥まで差し込む．

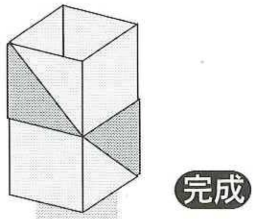


前ページ⑥と同じ

この2つの折り目が一致したら
矢印の向きに押しつぶして
四角い筒にする

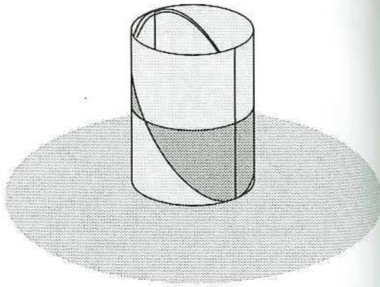


前ページ⑦と同じ



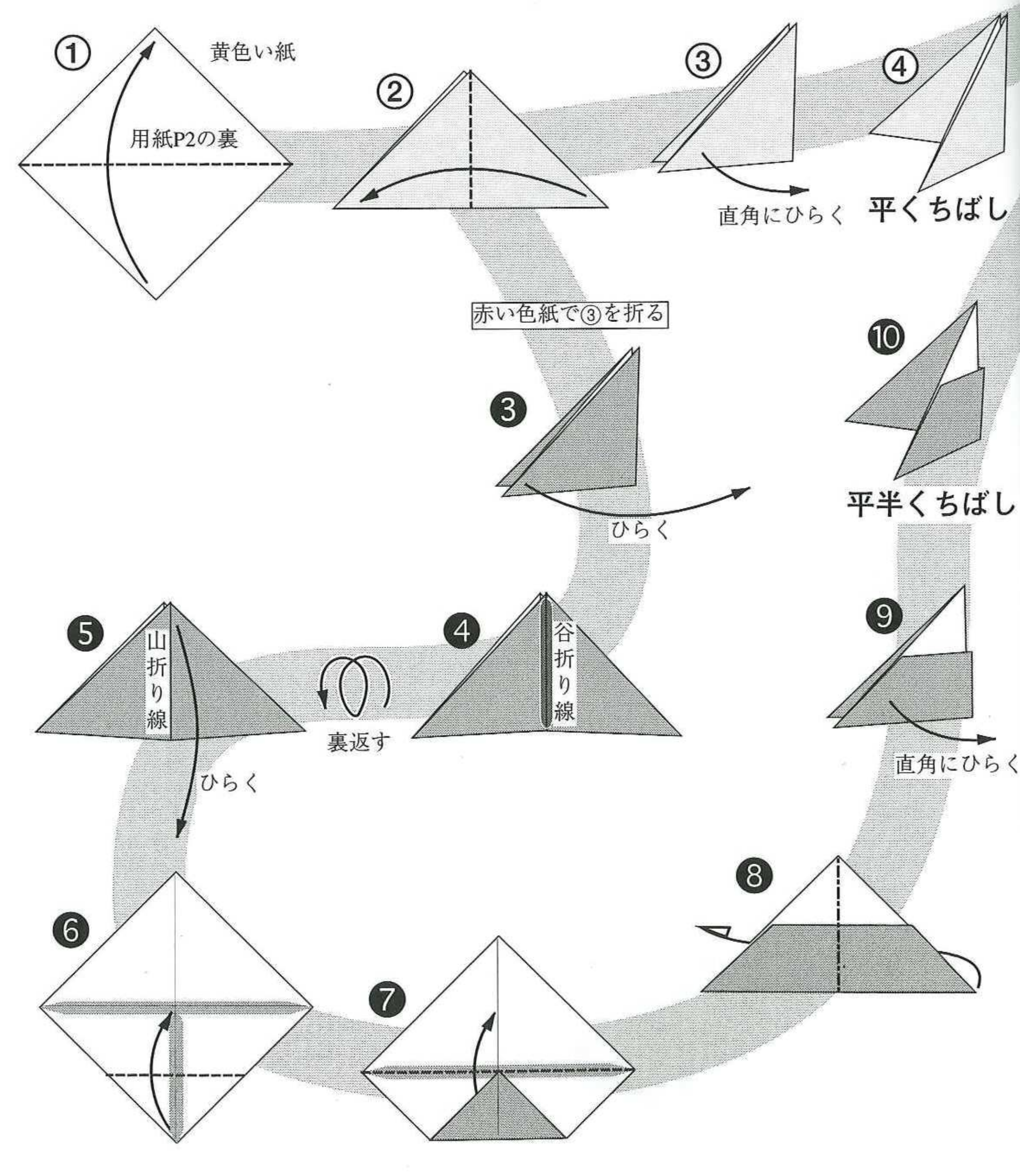
それでも組めないときは

以下の①～⑰に沿って**円筒ブロックC**を作ってください．
できたら基本ブロックAに再挑戦してください．



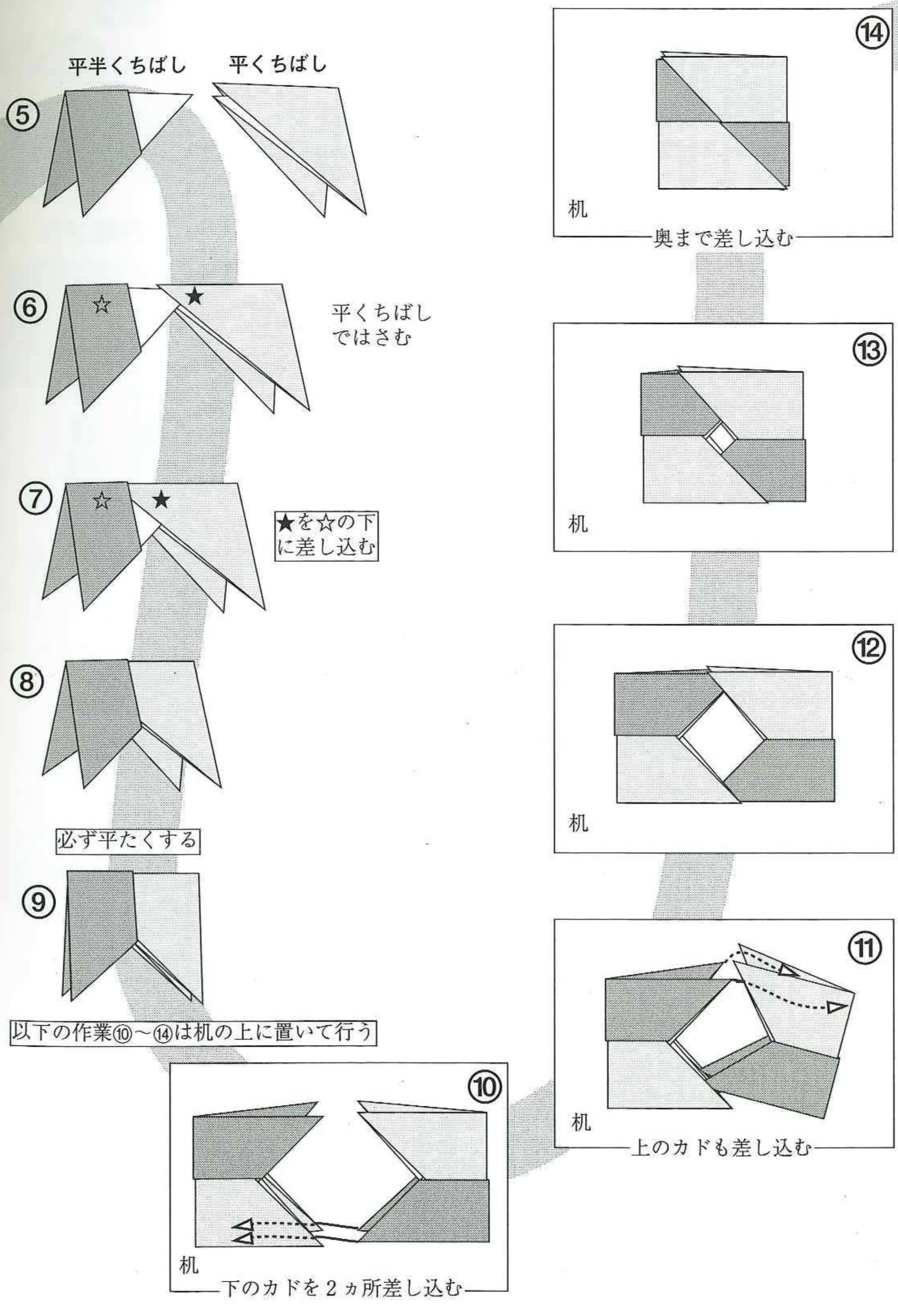
円筒ブロックC (P2×4)

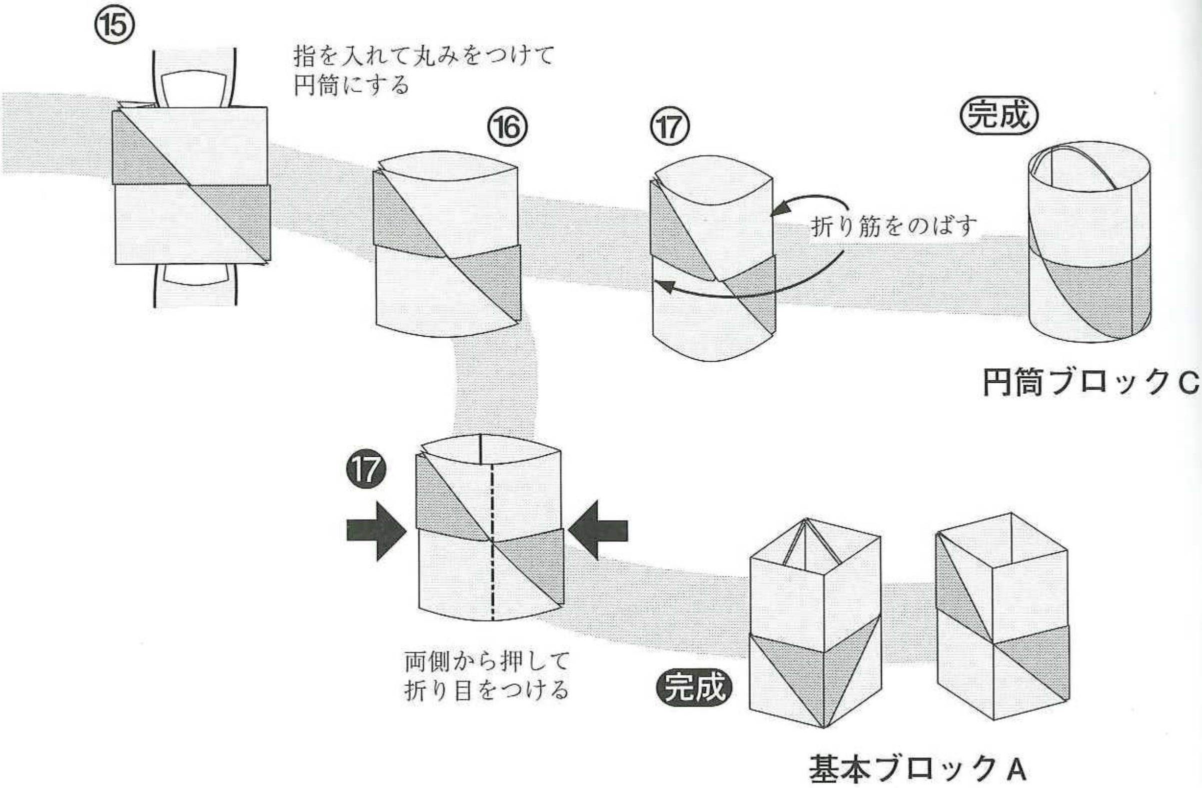
くちばしと半くちばしの代わりに，**平くちばし**と**平半くちばし**で作ります．



円筒ブロックCの組立

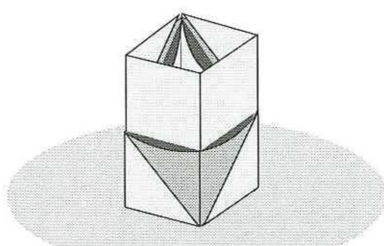
⑩～⑭は机の上に置いて行ってください.

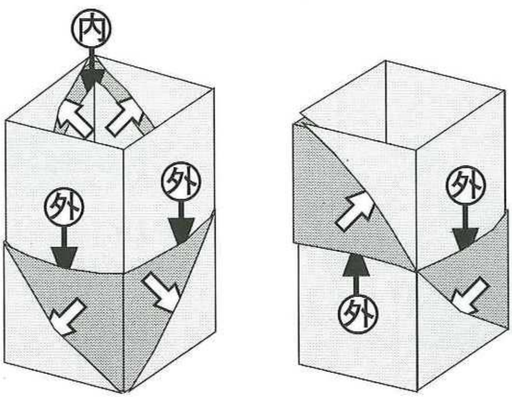




外ポケットと内ポケット

右図で影をつけたすき間を**ポケット**と呼びます．基本ブロックAの組み合わせに使います．
ブロックができたら，ポケットがあるかどうか確認してください．もしポケットの様子が下図と違っていたら，どこかで間違えています．
[指を袋の中へ] に注意して組み直してください．



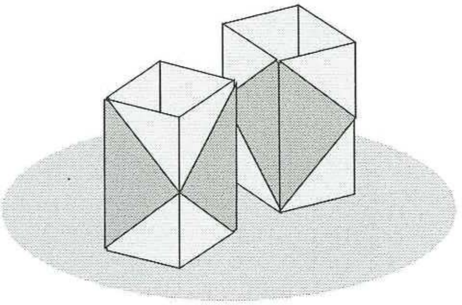


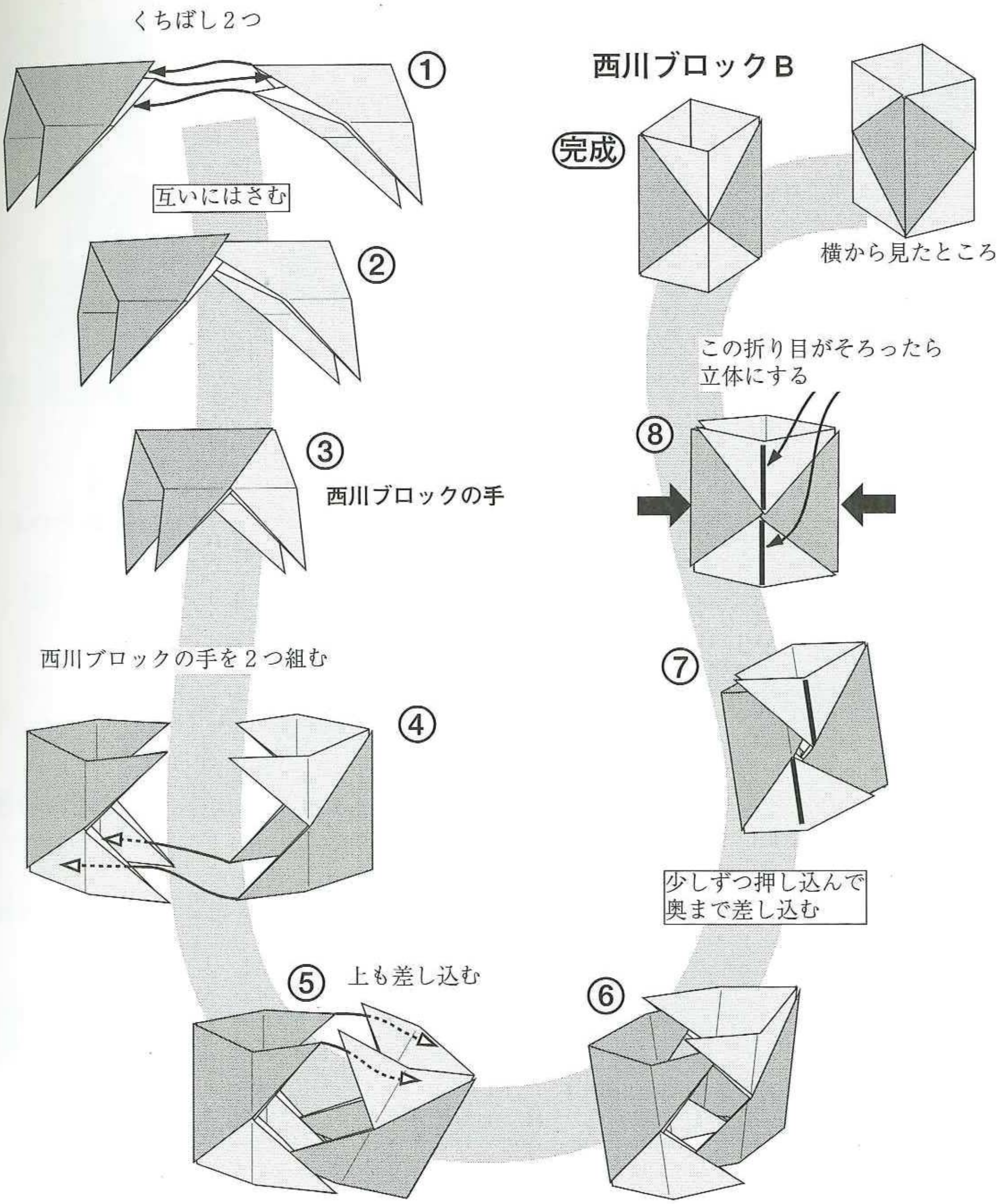
外→は外ポケット
内→は内ポケット
を表します．

⇨のすき間はブロックの組み合わせには使いません．

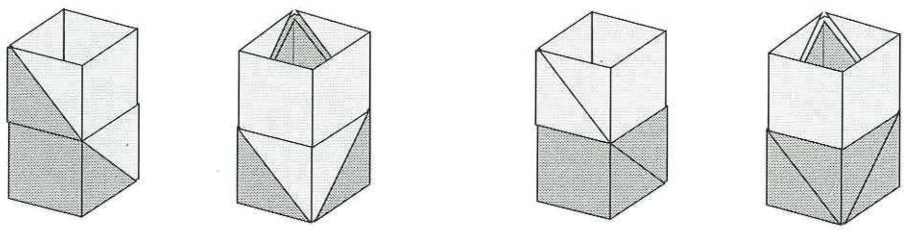
西川ブロックB (くちばし×4)

半くちばしを使わずにくちばしだけでブロックを作ることができます．第１考案者西川誠司さんの名前をいただいて**西川ブロック**とよびます．



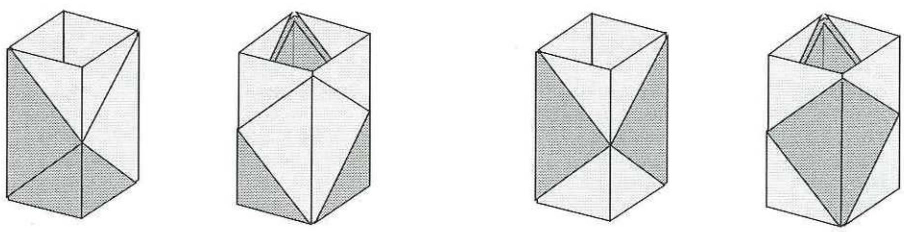


問題1-2　くちばしと半くちばしの配色を考えて下図のような模様の基本ブロックAを作ってください.



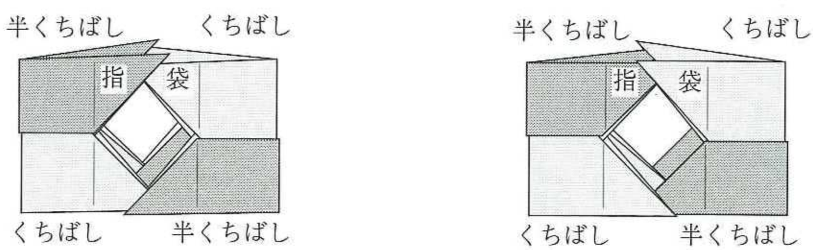
(1)　　(2)

問題1-3　くちばしの配色を考えて下図のような模様の西川ブロックBを作ってください.



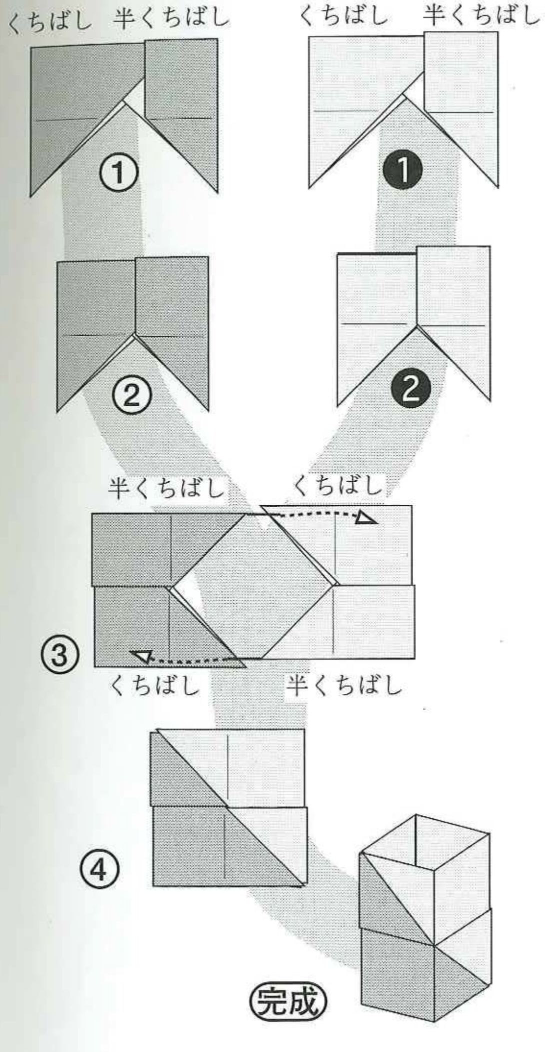
(1)　　(2)

問題1-4　(1)のように手の指（半くちばしのカド）を袋（くちばしのカド）に差し込むとどのようなブロックになるでしょうか. なお(2)は基本ブロックAを作るときの正しい組み方です.

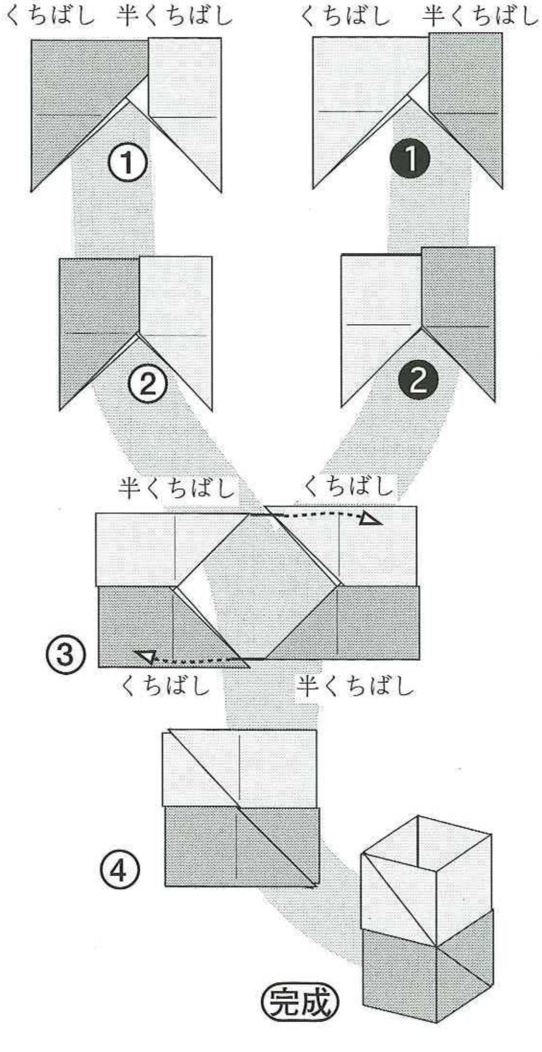


(1)　　(2)

問題1-2(1)の答え　①❶のように同色のくちばしと半くちばしで組んだ手を，③のように組みます．

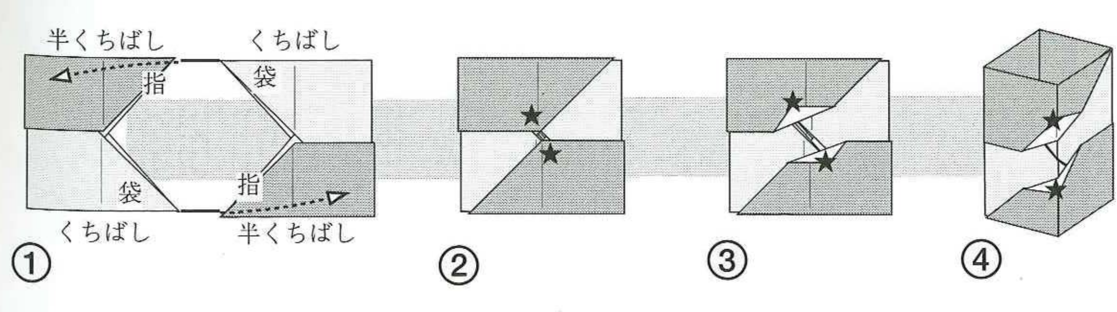


問題1-2(2)の答え　①と❶は，くちばしと半くちばしの配色が逆です．

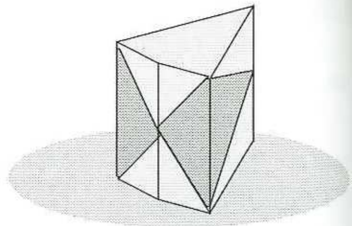


問題1-3の答え　(1)(2)ともに問題1-2①❶の半くちばしをくちばしに代えるだけです．配色はそのままです．

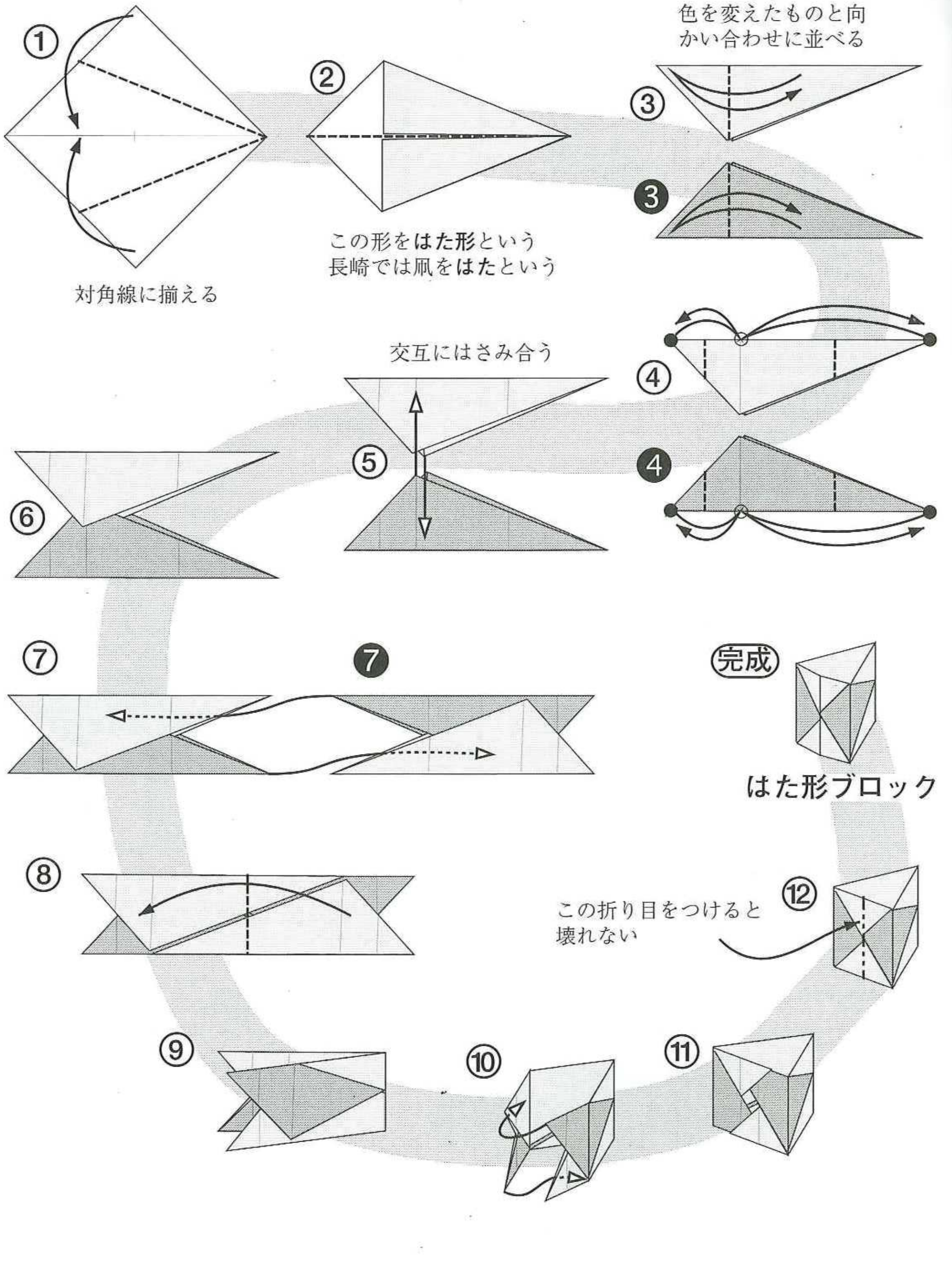
問題1-4の答え　袋を指に差し込むと，★部分が③④のようにめくれるので良くありません．



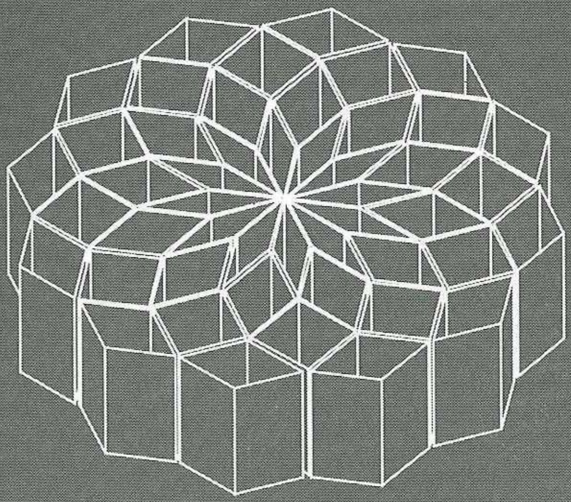
はた形ブロックK (P2×4)



用紙が正方形でなくてもブロックは作れます．ここでは，
はた形（②）を使った**はた形ブロック**を紹介します．
菱形用紙を使ってもブロックは作れます．正方形の場合とほ
とんど同じなので考えてみてください．



1.2



1.2 花

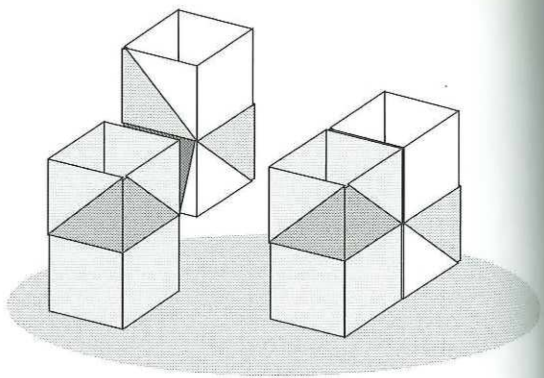
短ジョイントS
S横組
花
桜
菊
大量生産1

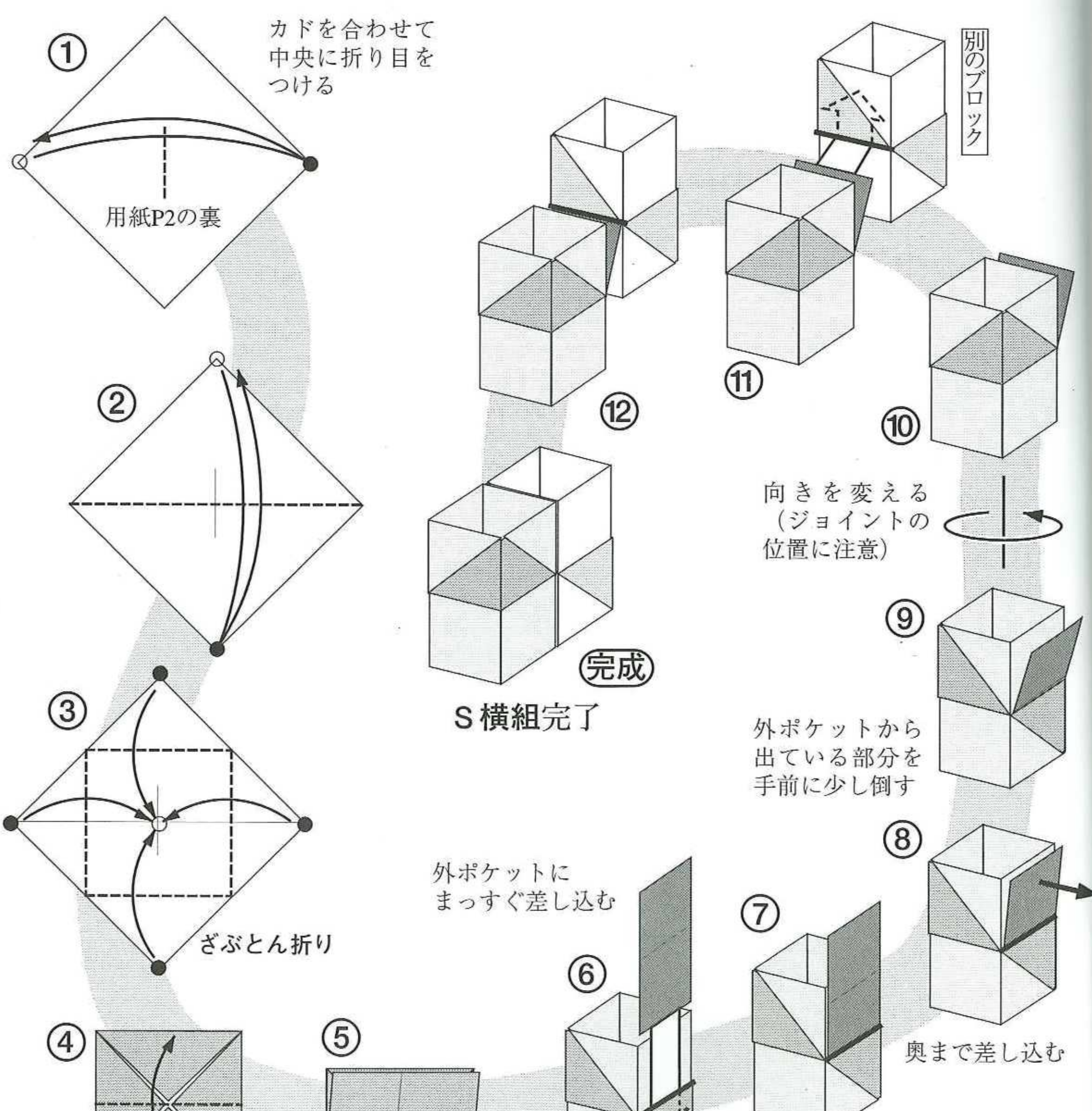
短ジョイントS (P2)

短ジョイントS（右図の濃い部分）は基本ブロックAを横につなぐための部品です．くちばしと同じ大きさの紙で折ります．

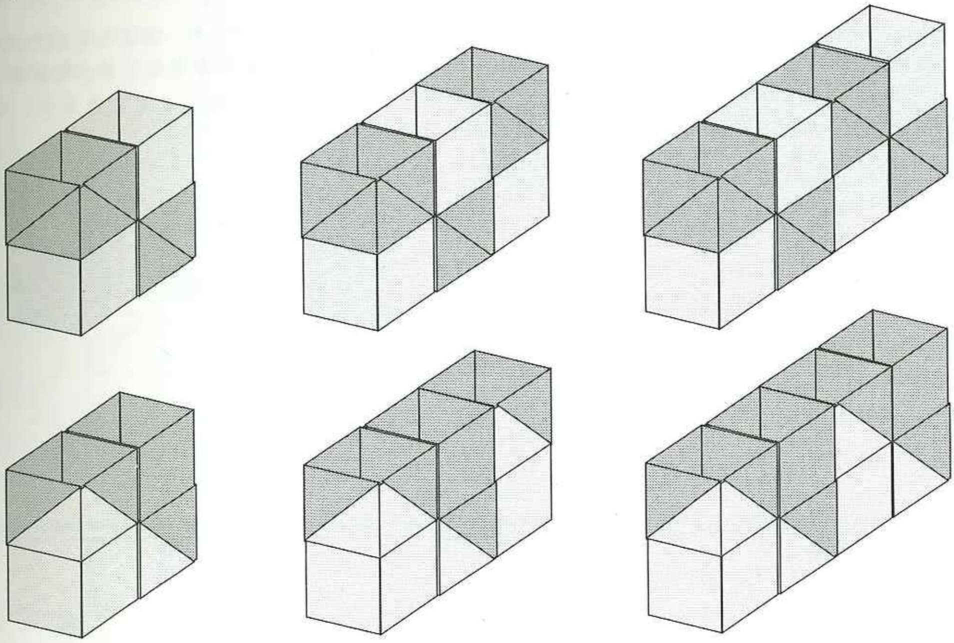
S横組

短ジョイントSの両端をブロックの外ポケットに差し込んで基本ブロックAを横につなぎます．

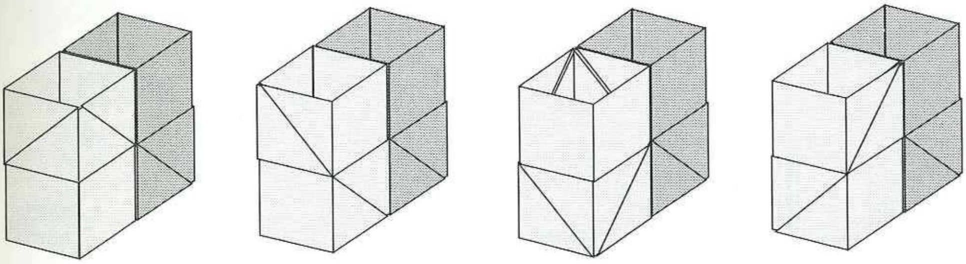




練習2-1　基本ブロックＡをＳ横組して下の模様を作ってください.



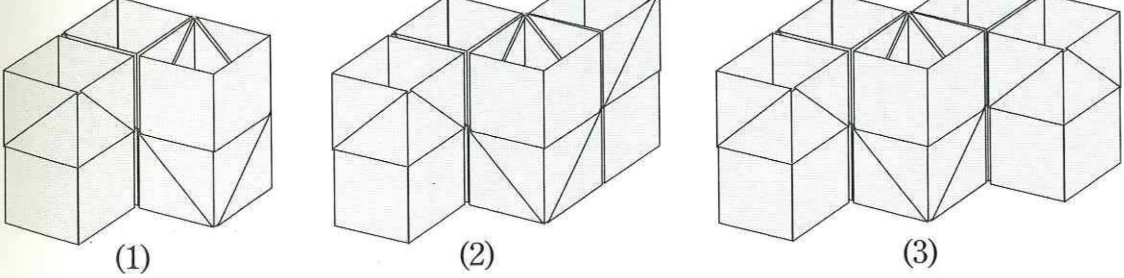
問題2-1　下図の中でＳ横組されたものはどれでしょうか．なお濃い色のブロックは４つとも同じ向きに置かれています.



(1)　(2)　(3)　(4)

答え　(1)と(2)です．(3)と(4)は接する面の外ポケットが共に下向きに口を開いているので，短ジョイントＳでは組めません．なお３２ページの横ジョイントＪを用いると(3)のように組むことができます.

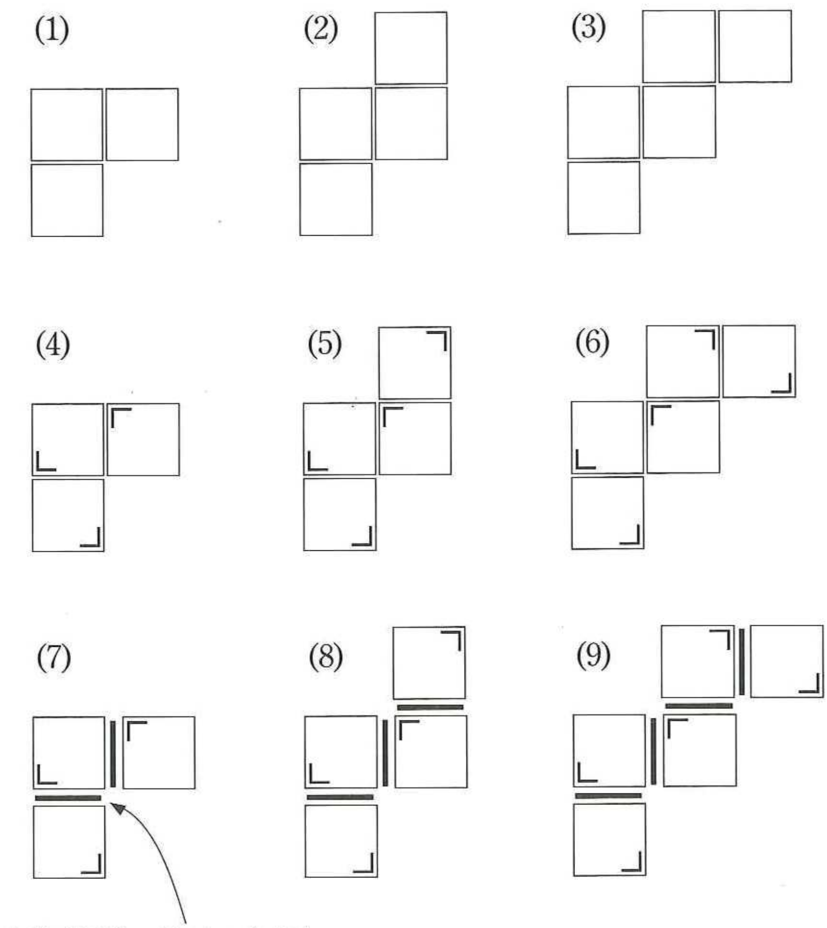
練習2-2　基本ブロックＡを下図のようにＳ横組してください.



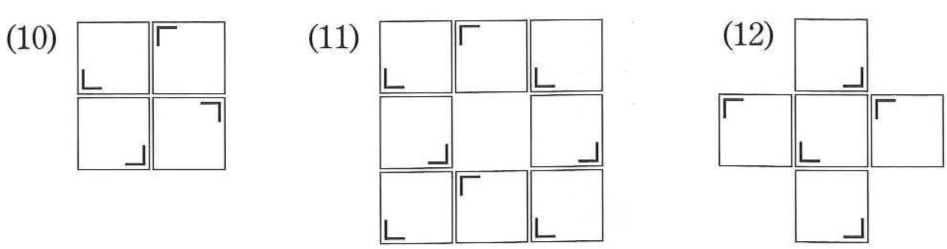
(1)　(2)　(3)

基本ブロックAの表示法

基本ブロックAのS横組は，ま上から見た図で示した方がわかりやすいです．練習2-3(1)(2)(3)をま上から見ると下図(1)(2)(3)のようになります．(4)(5)(6)は，ブロックの向きがわかるように，**内ポケット**をL字マークで印したものです．また(7)(8)(9)のように短ジョイントSを表示することもできます．ただしこれらの表示法ではくちばしや半くちばしの配色はわかりません．

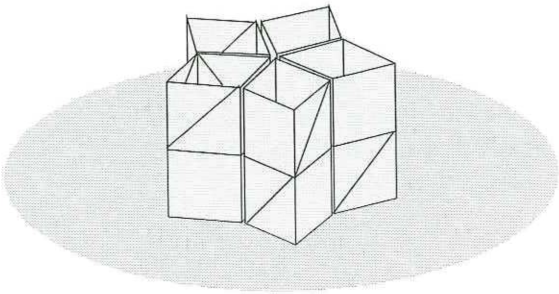


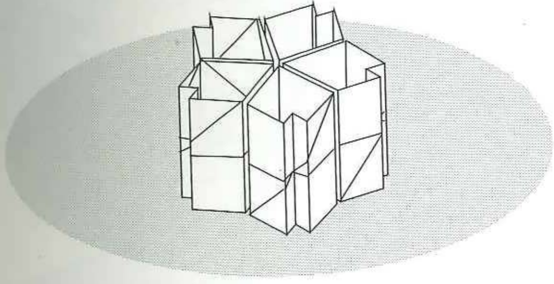
練習2-3　下図のようにS横組してください．



花 (P3×花びらの枚数×5)

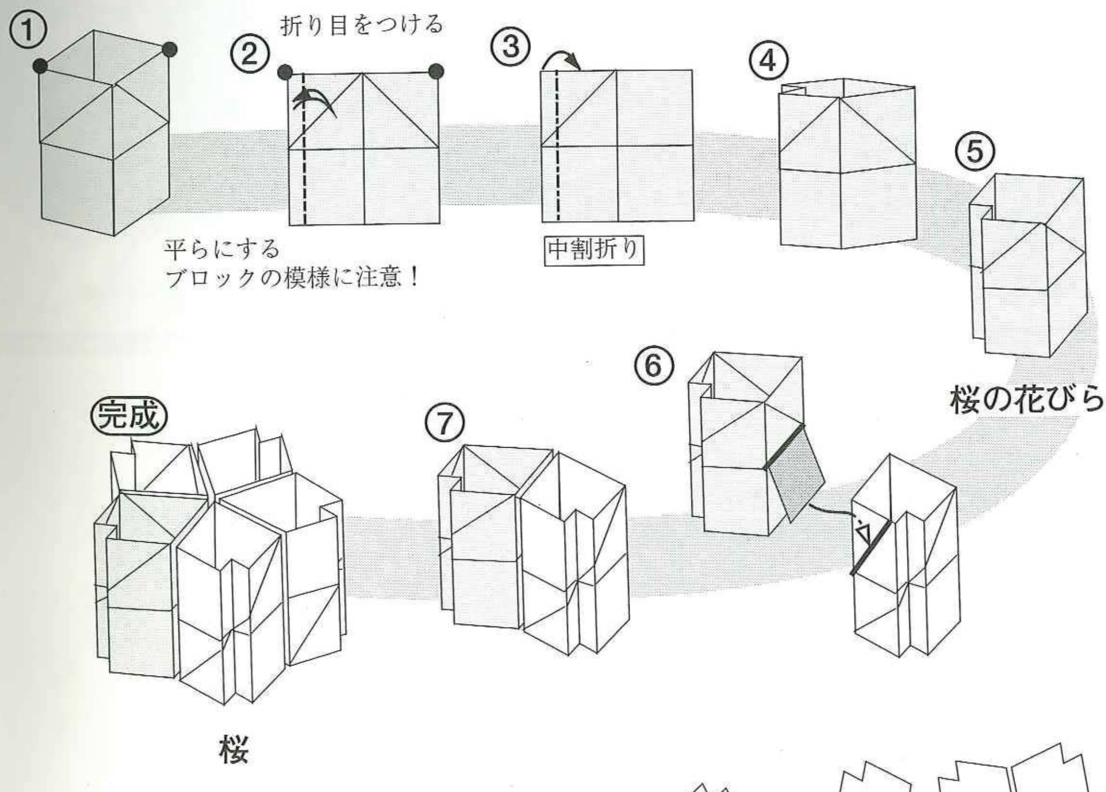
基本ブロックＡを少しつぶしてからＳ横組すると，厚みのある和菓子のような花ができます．

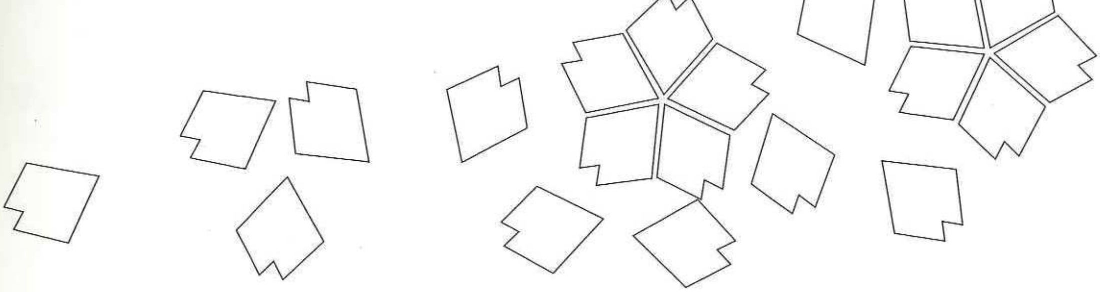




桜 (P3×25＝Ａ×5＋Ｓ×5)

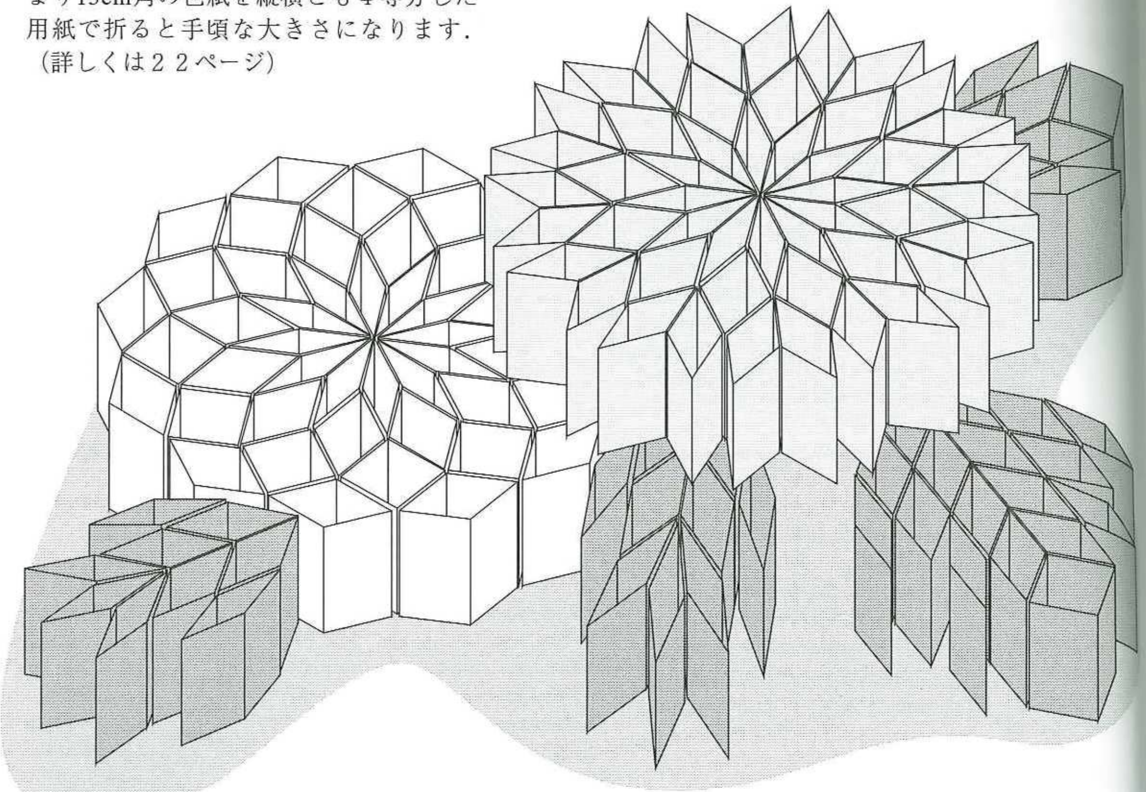
基本ブロックＡのカドを折って桜の花びらにします．これを５つＳ横組すると桜の花ができます．なお花びらの切れ込みは下図①②のカド●のどちらか一方です．





菊（P3たくさん）

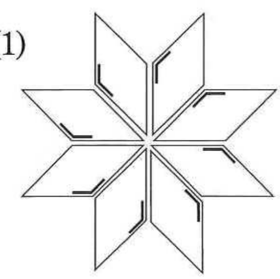
花びらを増やすと**菊**ができます．用紙P3つまり15cm角の色紙を縦横とも４等分した用紙で折ると手頃な大きさになります．（詳しくは２２ページ）



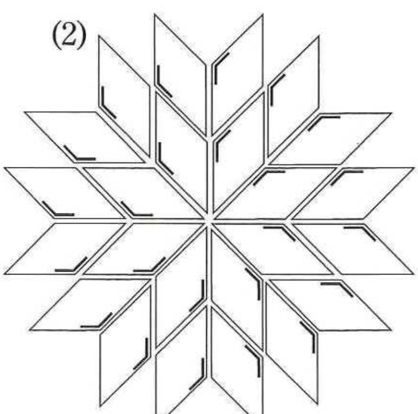
菊の花（P3たくさん）

(1)(2)は中央にブロックを８個，(3)は１２個並べたものです．外側にブロックをつぎ足すと(4)(5)(6)のようになります．ブロックの向きは規則的なので慣れると図面は不要です．
配色を工夫すると花火を表現することもできます．

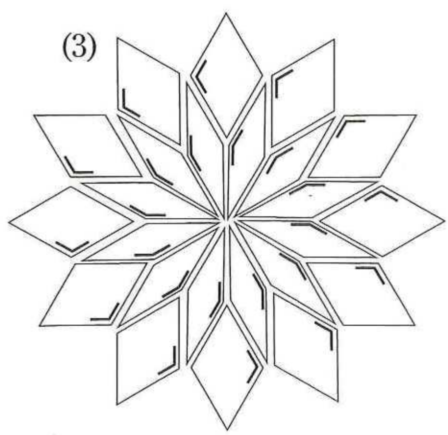
(1)



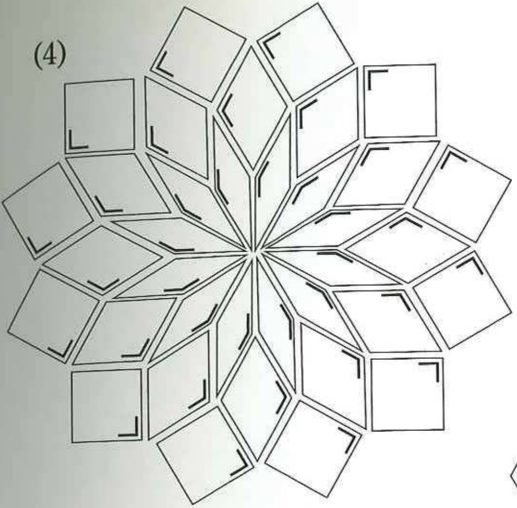
(2)



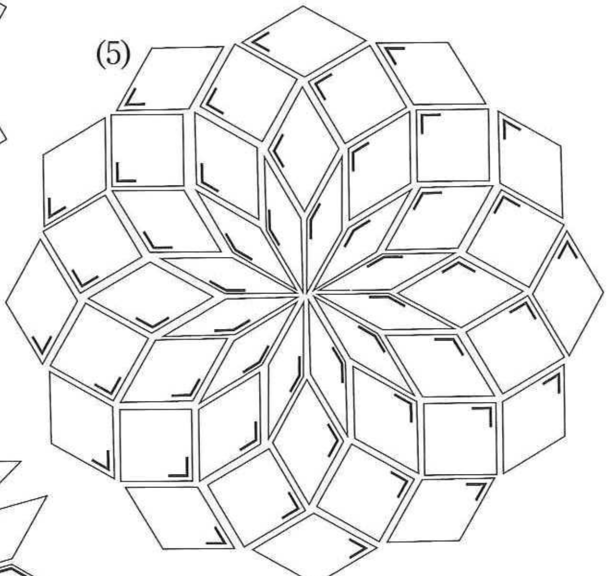
(3)



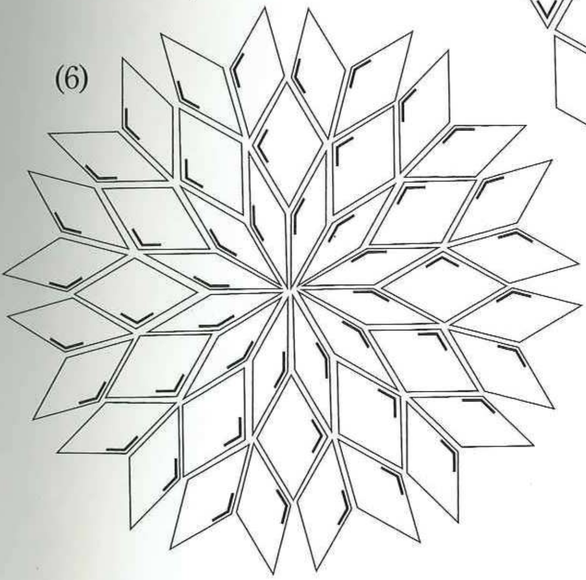
(4)



(5)

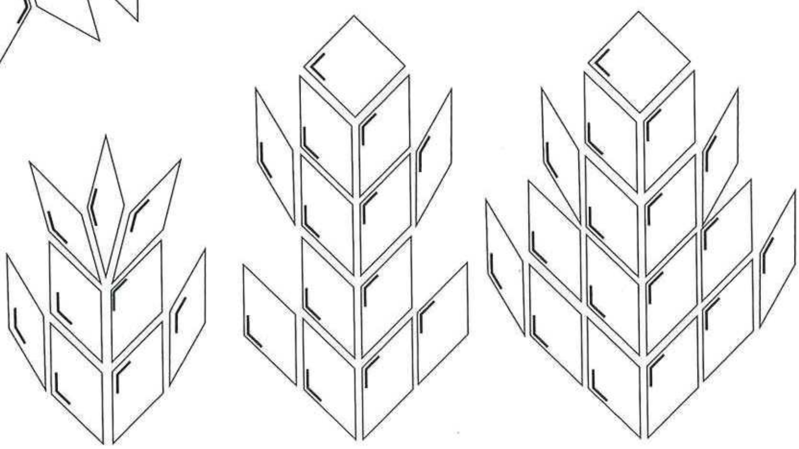


(6)



菊の葉 (P3たくさん)

下図を参考にしてください.

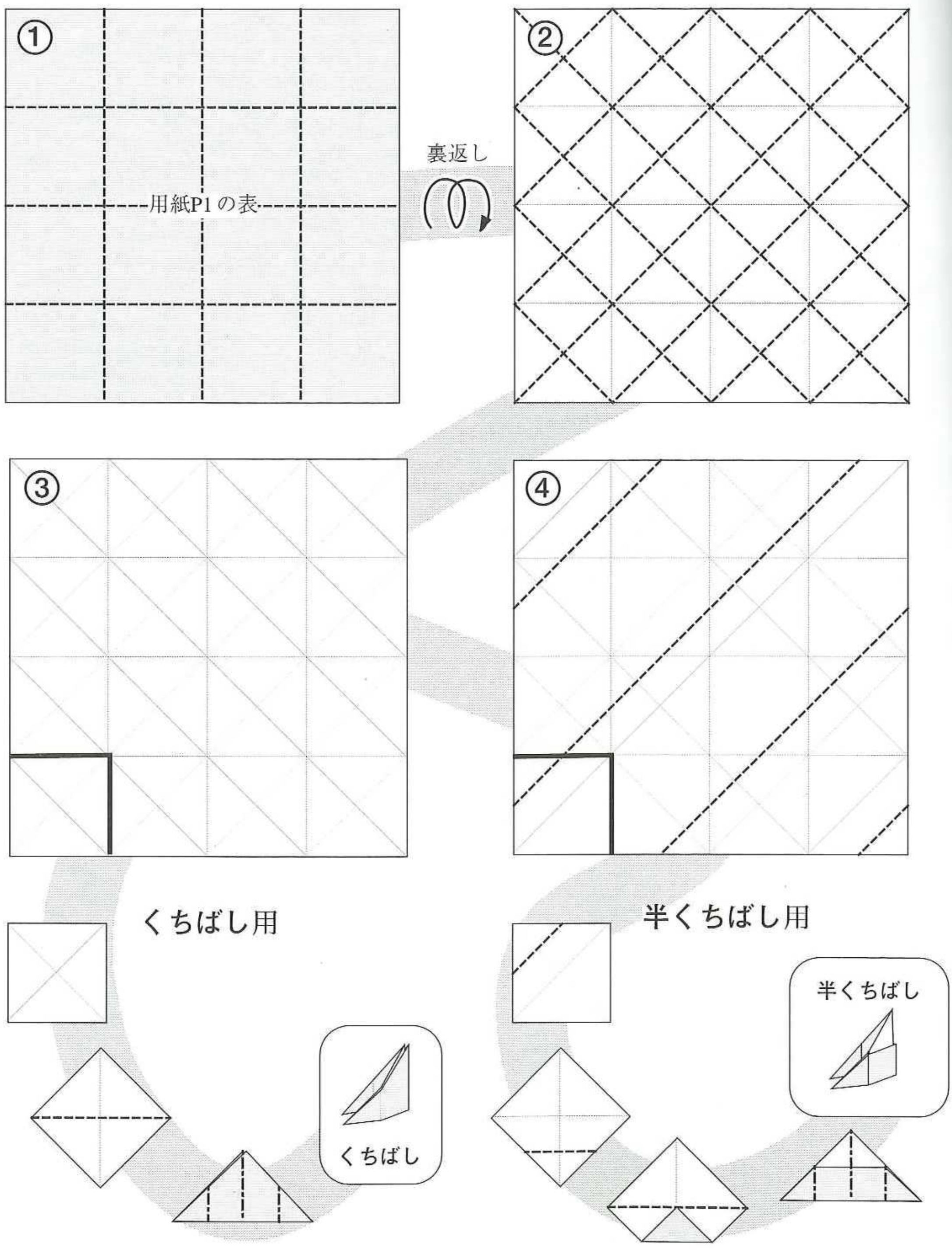


練習2-4　(1)～(6)はそれぞれ基本ブロックAと短ジョイントSを何個使っているでしょうか. また紙を何枚使っているでしょうか.

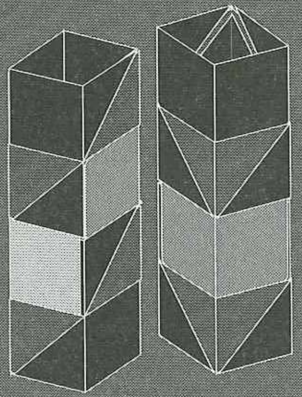
答え　(A, S, 紙) は順に (8, 8, 40), (24, 32, 128), (24, 36, 132), (36, 60, 204), (48, 84, 276), (48, 72, 264) です.

大量生産１ (P1)

菊のように小さなブロックやジョイントをたくさん必要とするとき，小さな紙を用意してから折るより，広い紙に折り目をつけてから小さく切った方が楽です．普通の色紙から一度に１６個の**くちばし**や**半くちばし**を作る方法を説明します．



1.3

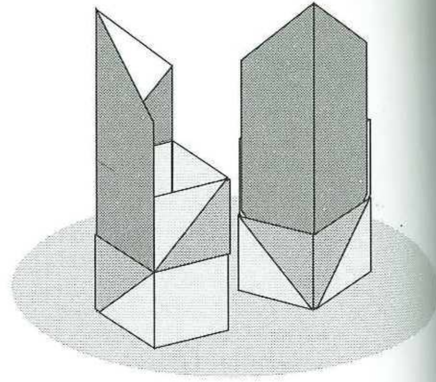


1.3 縦組

縦ジョイントT
長ジョイントL
基本ブロックAの縦組
はた形ブロックKの縦組

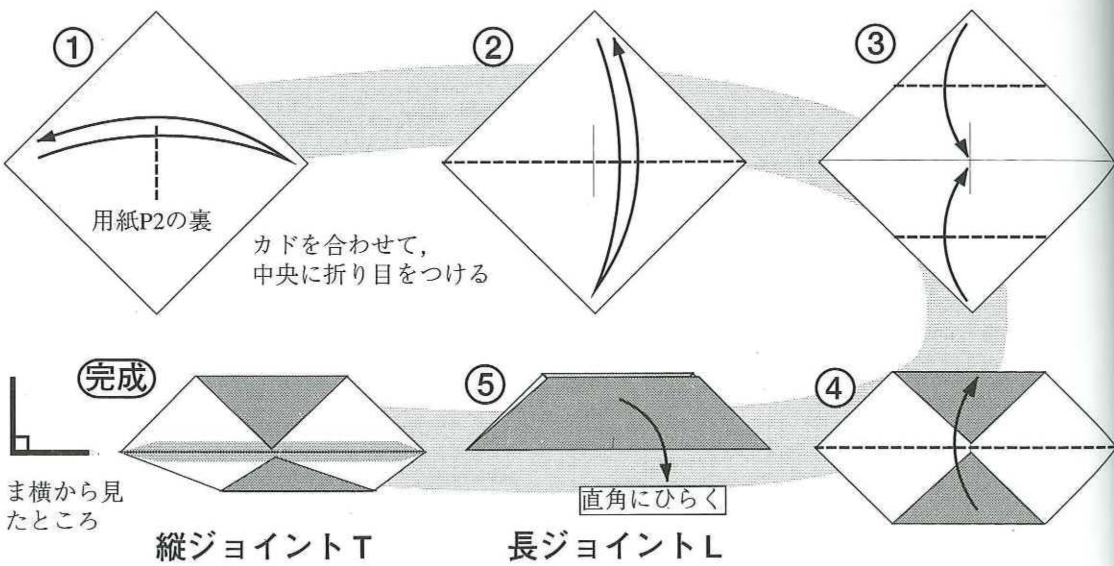
縦ジョイントT (P2)

基本ブロックAを縦に組む部品です．



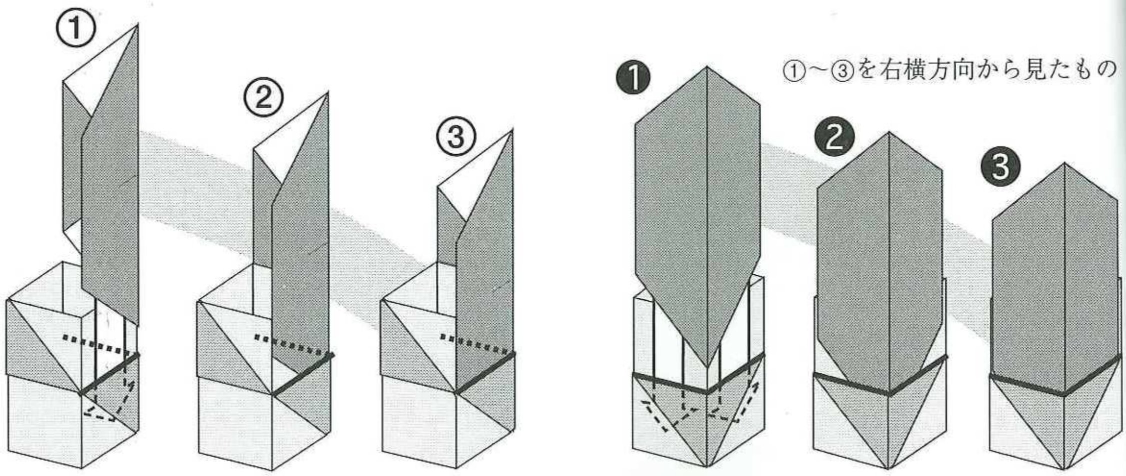
長ジョイントL (P2)

縦ジョイントTの⑤を**長ジョイントL**とよびます．
ブロックを横に組むときに使います．



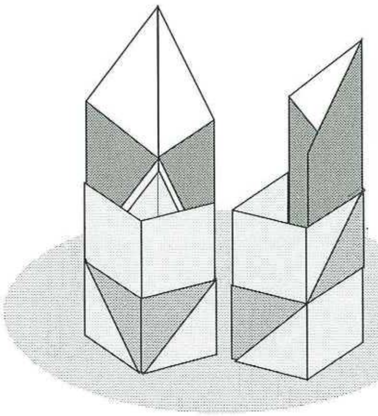
縦ジョイントTの外差し

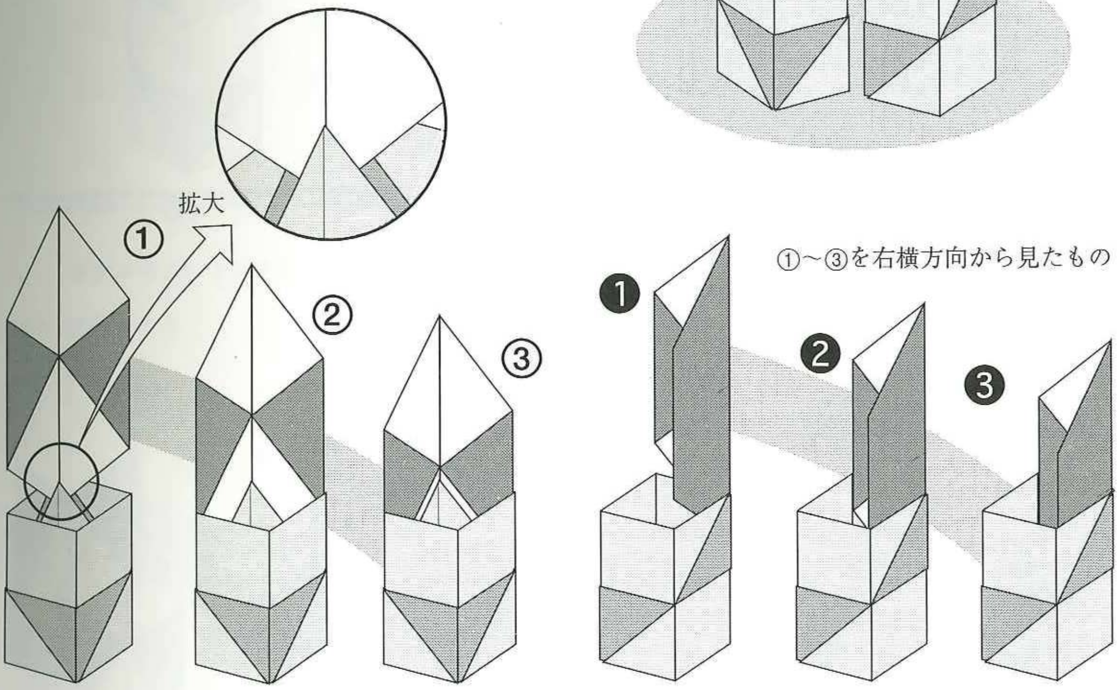
縦ジョイントTを直角にひらいたままブロックの長い辺に沿って外ポケットに差し込みます．



縦ジョイントTの内差し

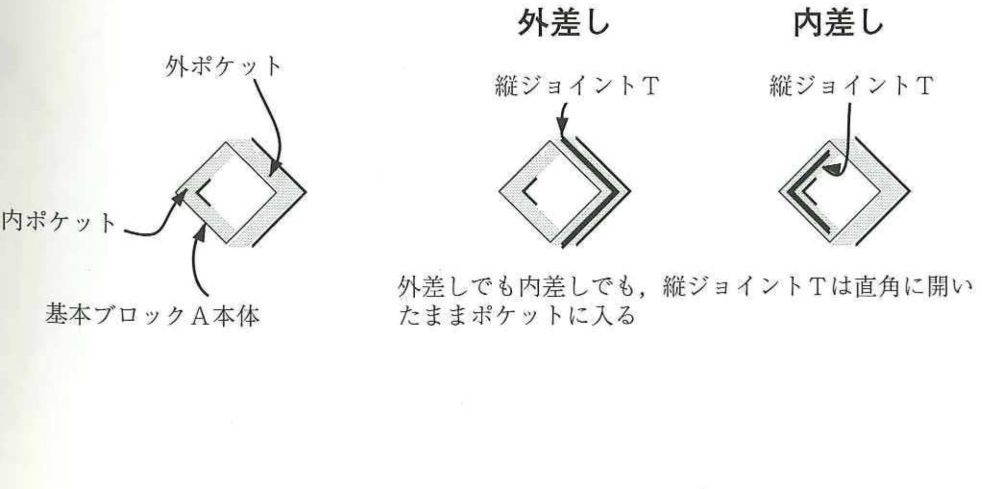
縦ジョイントＴは内ポケットに差し込むこともできます．





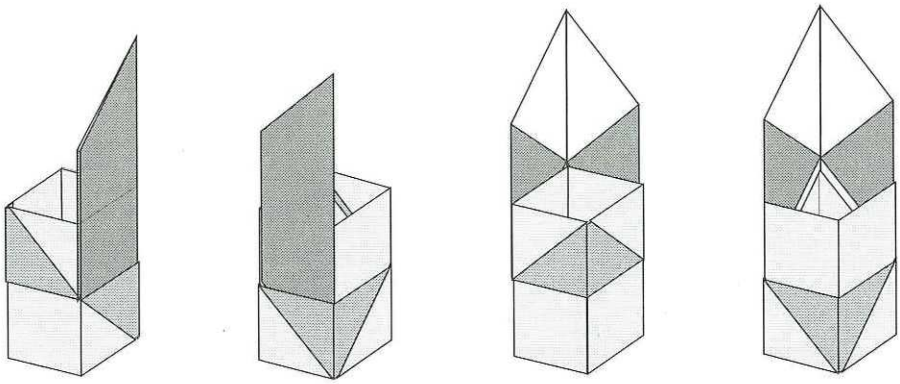
外差しと内差しの関係

ま上から見て「くの字」の縦ジョイントＴは，下図のようにブロックの外ポケットと内ポケットに入ります．



外差しでも内差しでも，縦ジョイントＴは直角に開いたままポケットに入る

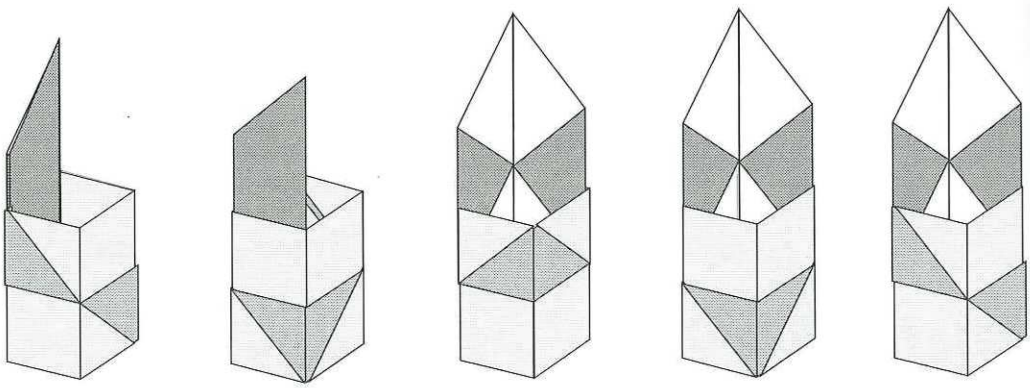
問題3-1　(1)〜(4)から縦ジョイントTの正しい外差しを選んでください．



(1)　(2)　(3)　(4)

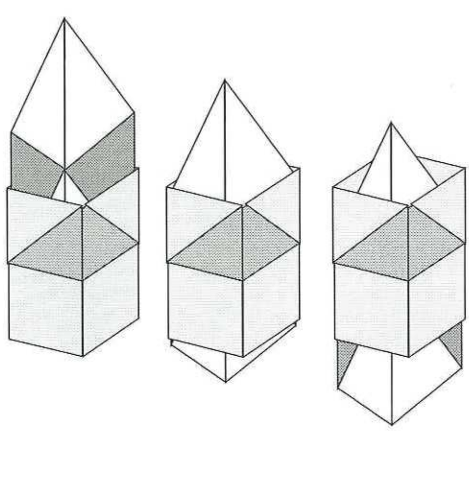
答え　正しいのは(3)だけです．ジョイントは向こう側の外ポケットへ差し込まれているからです．(1)(2)は縦ジョイントTではなくて長ジョイントLです．(4)は内差しです．

問題3-2　(1)〜(5)から縦ジョイントTの正しい内差しを選んでください．



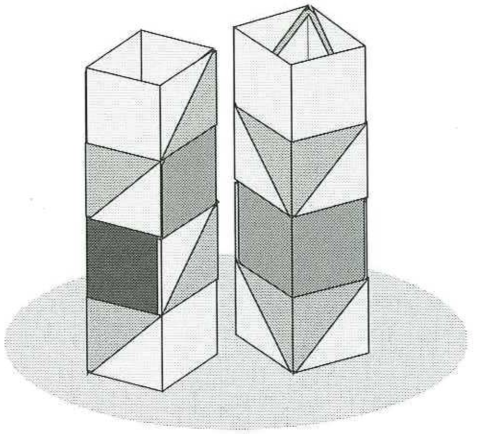
(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

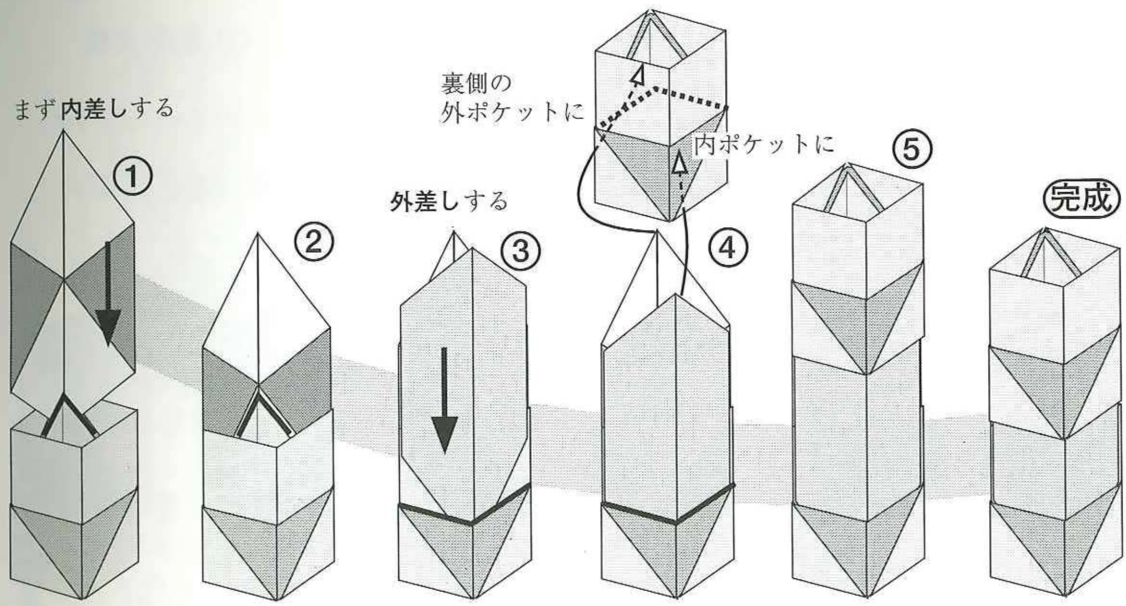
答え　すべて間違いです．
(1)(2)は長ジョイントLです．
(3)〜(5)は正しいように見えますが，ジョイントが内ポケットに入っていません．問題3-1の(4)と比較して違いを確認してください．
右図は(3)の縦ジョイントTをさらに押し込んだ様子です．反対側から飛び出しています．これではジョイントの役をなしません．



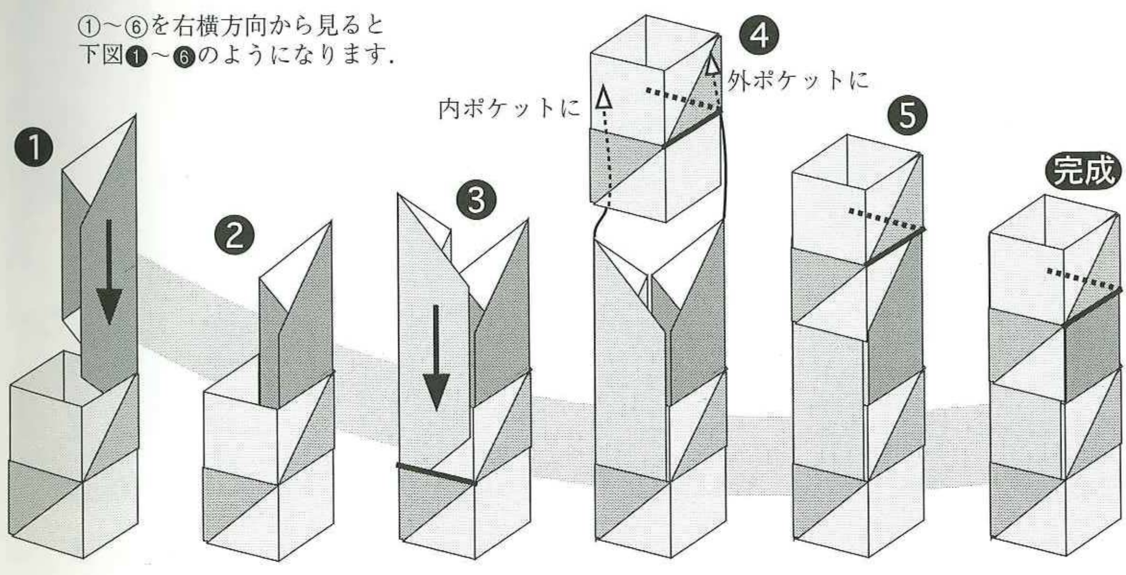
基本ブロックAの縦組

（A×2＋T×2）
縦ジョイントT２つで基本ブロックAを縦に組むことができます．
このとき縦ジョイントTの一端は内ポケットに，他端は外ポケットに入ります．この約束は絶対に守ってください．

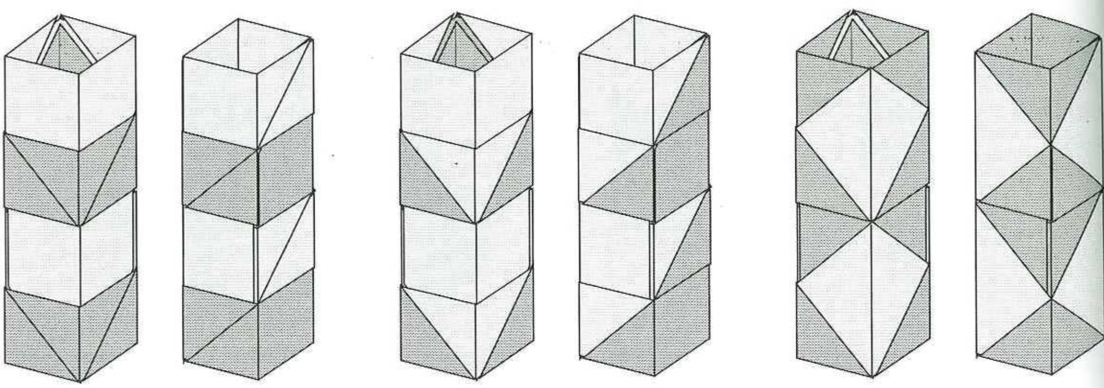




①～⑥を右横方向から見ると
下図❶～❻のようになります．



問題3-3 基本ブロックＡや西川ブロックＢを組んで，(1)四角文様，(2)三角文様，(3)菱形文様を作ってください

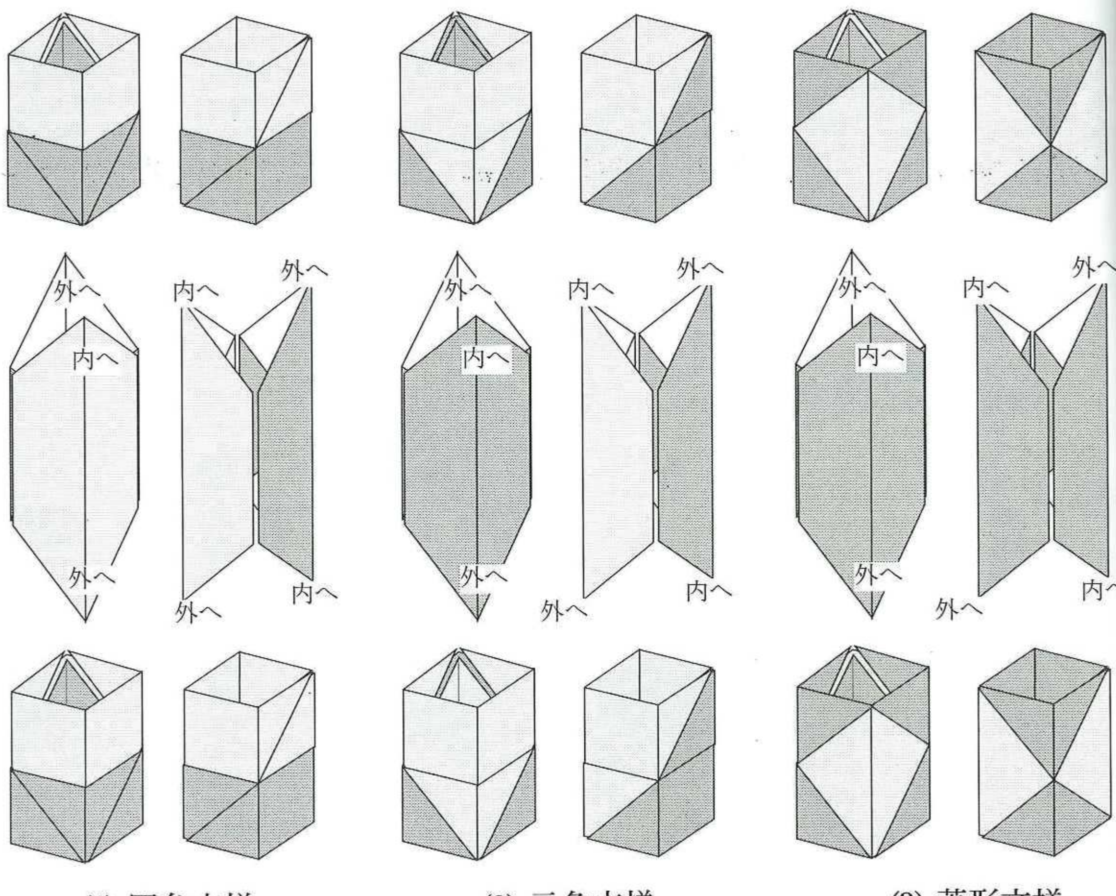


(1) 四角文様　(2) 三角文様　(3) 菱形文様

答え 四角文様は１２ページ問題1-2(2)の基本ブロックＡ，三角文様は問題1-2(1)の基本ブロックＡ，菱形文様は問題1-3(2)の西川ブロックＢを下図のように組みます．

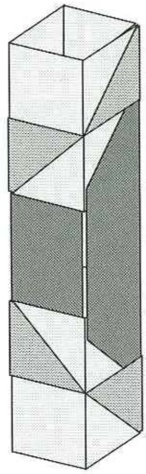
縦ジョイントＴの色は，内差しする側はブロックの中に隠れるので文様に影響しないが
外差しする側は外に出るので文様に影響する

に注意すると他の文様も自由に作ることができます．



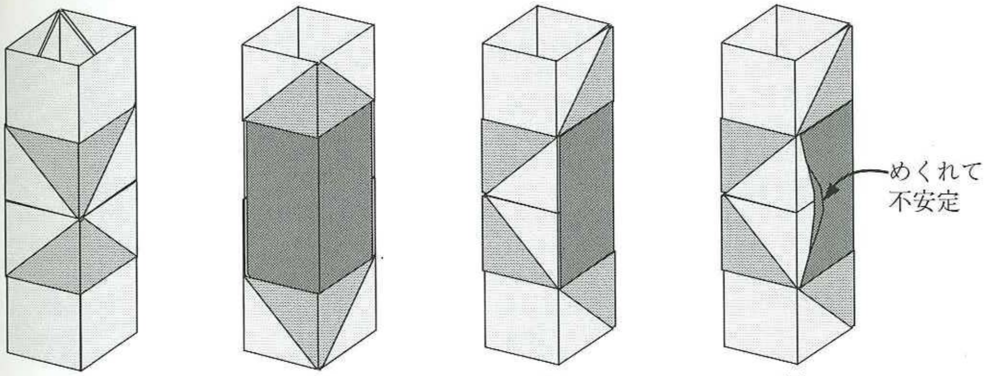
(1) 四角文様　(2) 三角文様　(3) 菱形文様

問題3-4　右図のように縦ジョイントT（濃い部分）の両端を内ポケットあるいは外ポケットに差し込むとどうなるでしょうか．



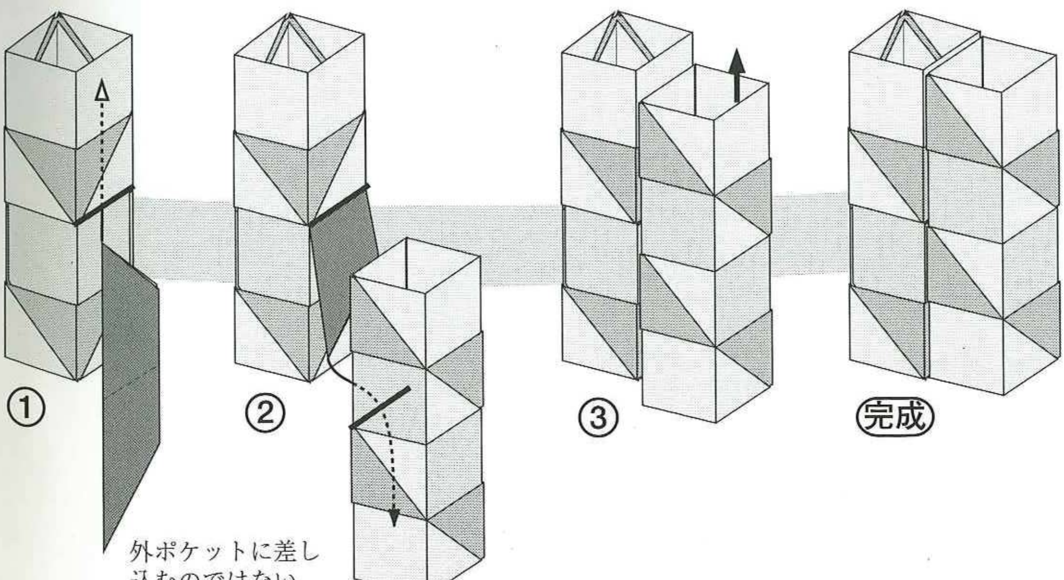
問題3-5　縦組した基本ブロックAを，長ジョイントLで横に組んでください．ヒント：S横組．

問題3-4の答え　両端を内差しした縦ジョイントTは，(1)のようにブロックの中に隠れます．逆に両端を外差しした縦ジョイントTは大部分が(2)のように外に出ます（(3)は横から見たもの）．
これでも一応組めますが，(4)のように外差しした縦ジョイントTがめくれるので良い組み方ではありません．



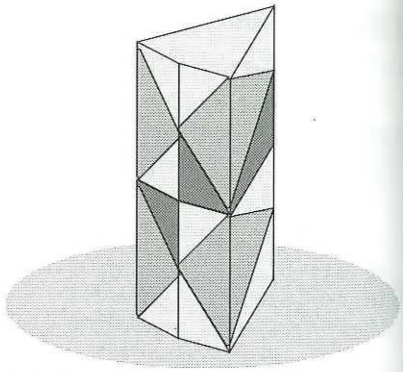
(1)　(2)　(3)　(4)

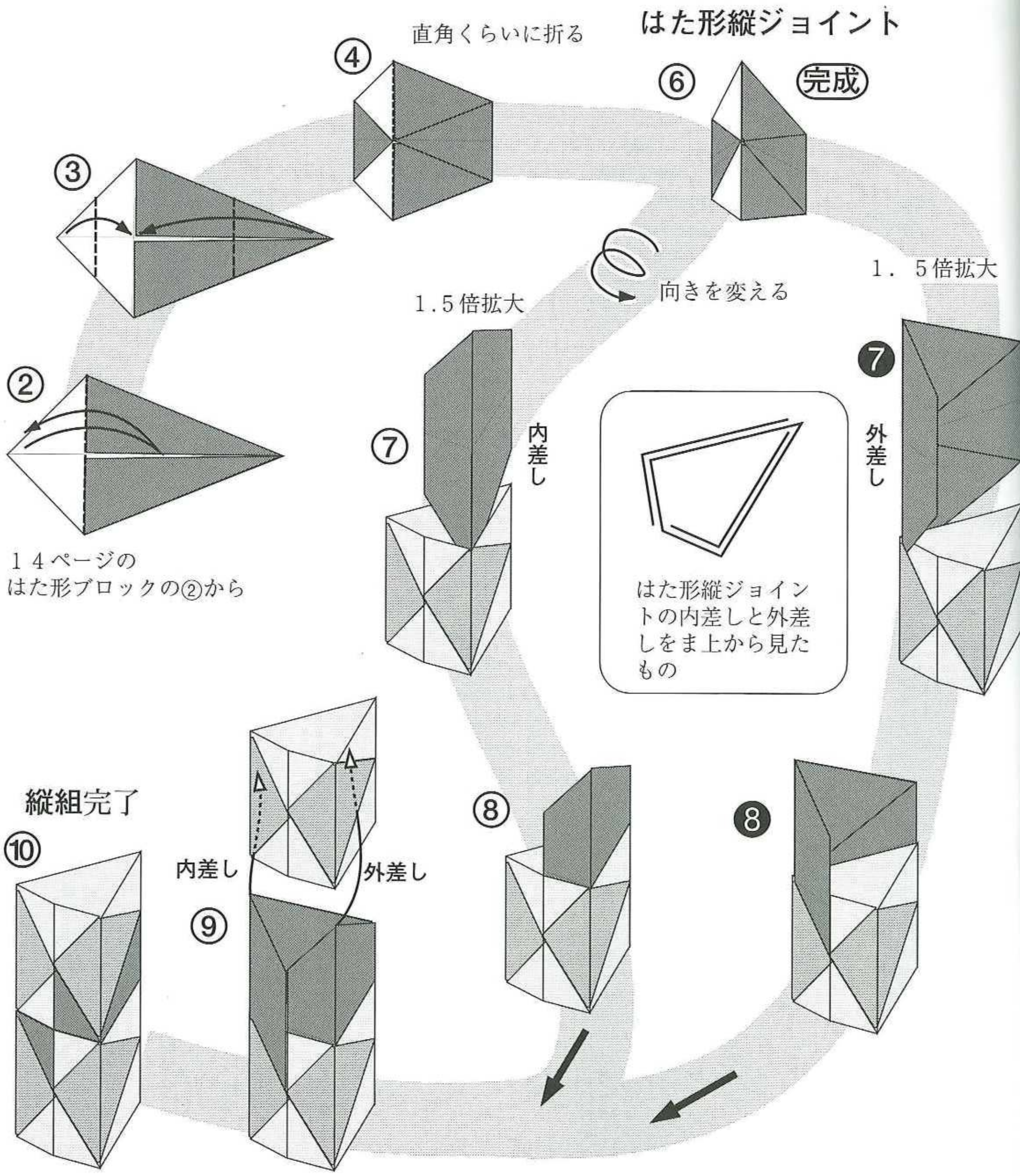
問題3-5の答え　長ジョイントLの両端を基本ブロックAの継ぎ目（①②の太線）に差し込みます．S横組同様に，組み終わるとジョイントは外から見えなくなります．



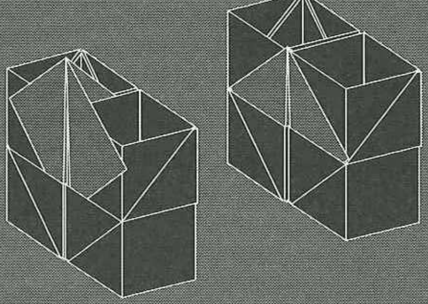
はた形ブロックKの縦組

（はた形ブロック×2+P2×2）
左右非対称の縦ジョイントで基本ブロックＡの縦組
と同じように組みます．





1.4



1.4 J横組

横ジョイントJ

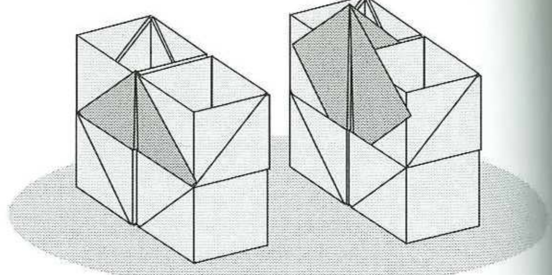
J横組

4個J横組

横ジョイントJ4

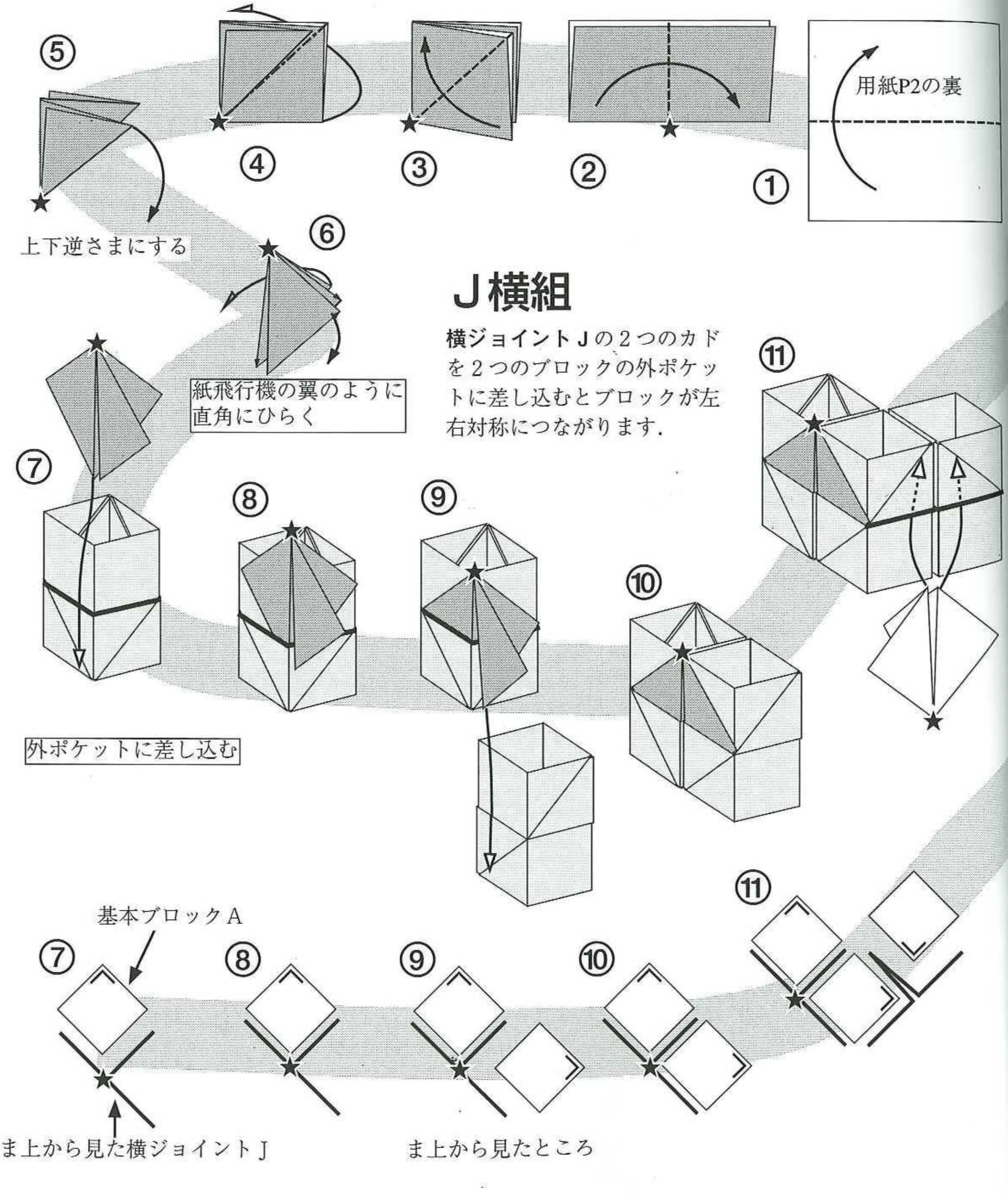
横ジョイントＪ (P2)

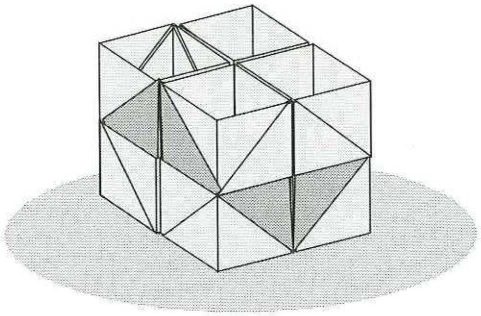
基本ブロックＡや西川ブロックＢを横に組むためのジョイントです．①～⑦の★印は用紙の中心を表しています．



Ｊ横組

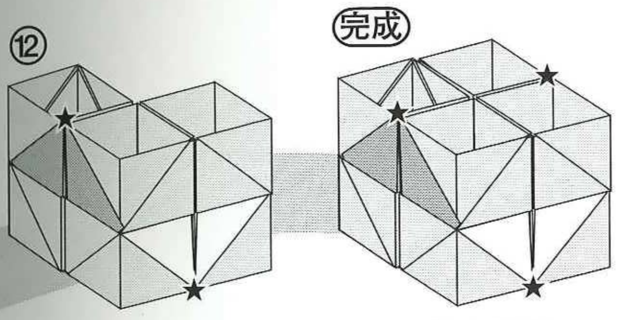
横ジョイントＪの２つのカドを２つのブロックの外ポケットに差し込むとブロックが左右対称につながります．



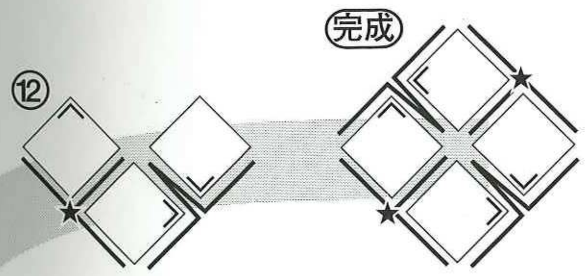


4個J横組 (A×4＋J×4)

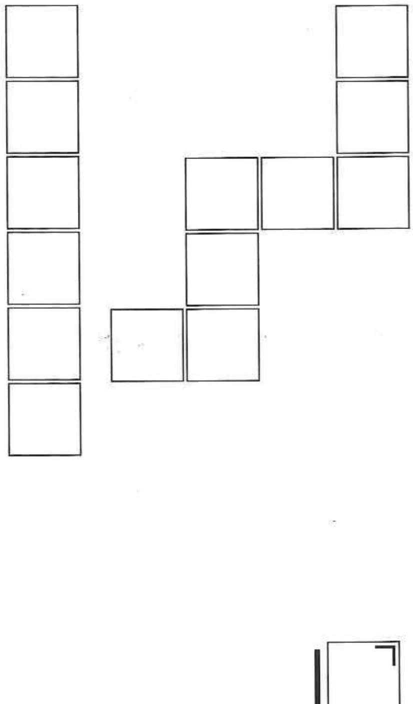
横ジョイントJで基本ブロックA４個を束ねるように**J横組**して立方体にしたものです．３５ページ以降の家の基礎になります．



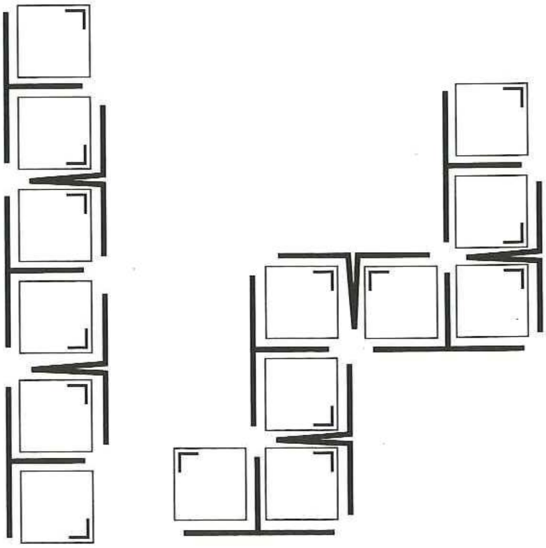
4個J横組

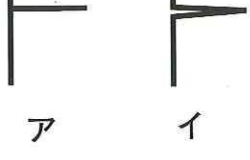


問題4-1　下図のように**J横組**してください．またブロックの内ポケットと横ジョイントＪを記入してください．



問題4-1の答え　下の**ア**，**イ**は横ジョイントＪをま上から見たものです．**ア**は⑦～⑩のような上からの差し込み，**イ**は⑪のような下からの差し込みを表します．

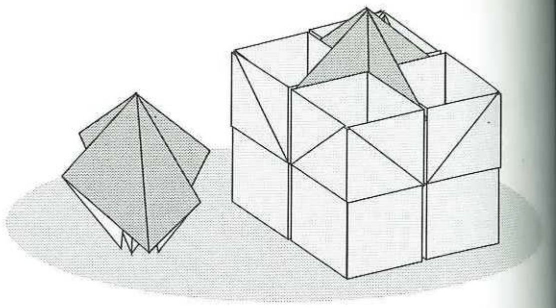


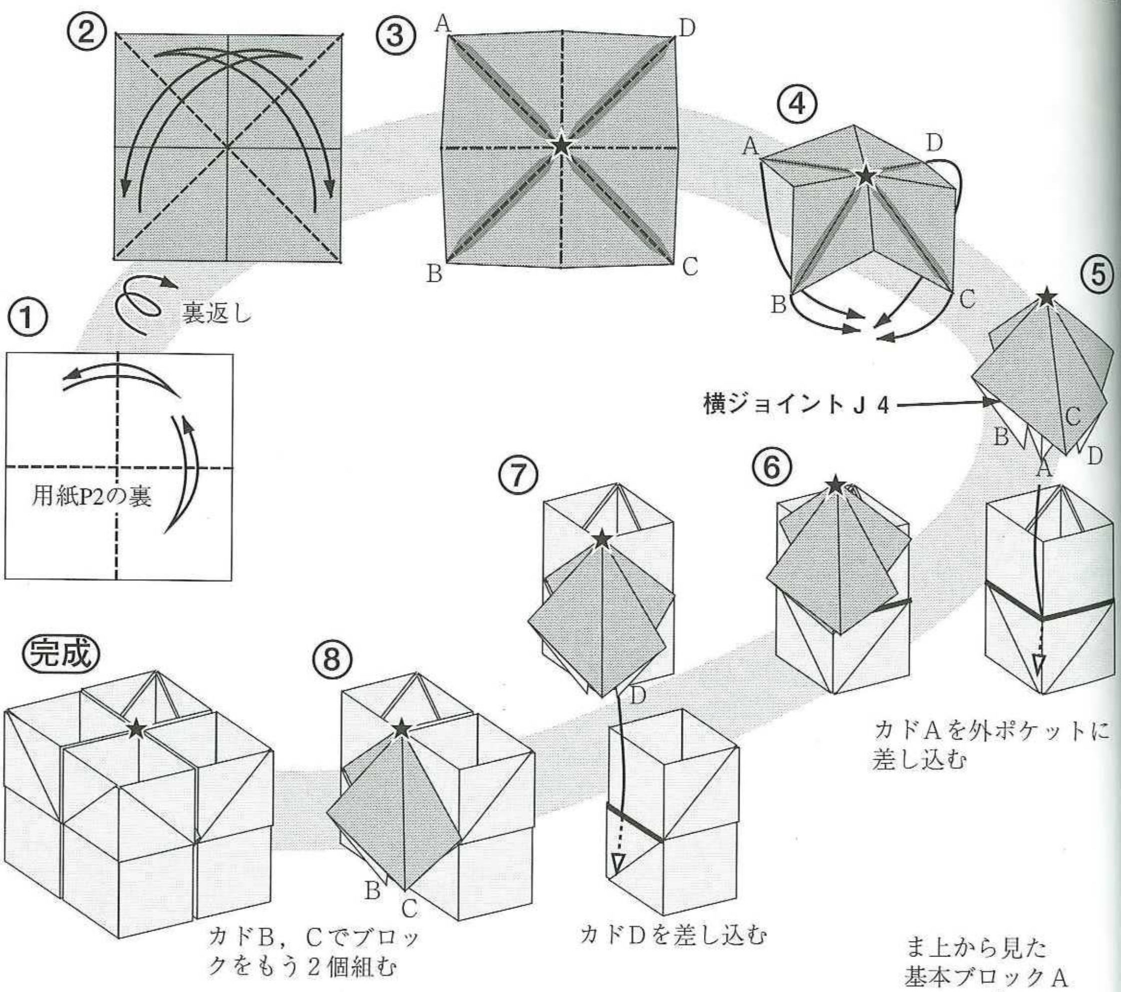


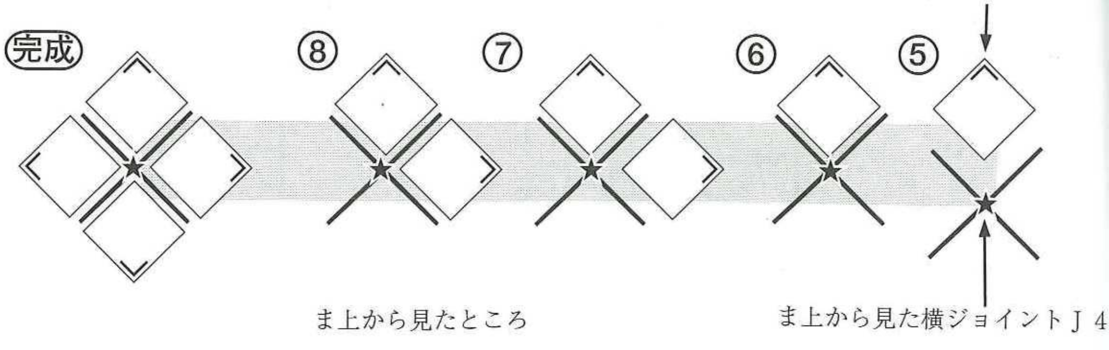
ア　**イ**

横ジョイントＪ４ (P2)

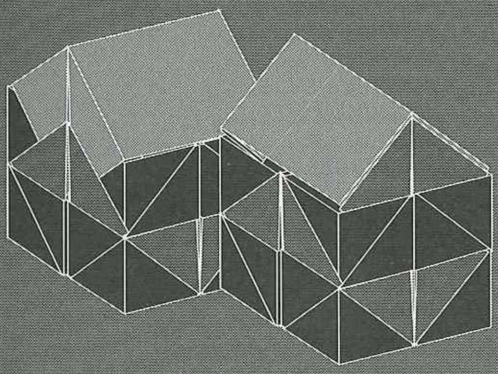
横ジョイントＪ４は１つでブロックを４個をつなぐことができます．★印は用紙の中心を表します．







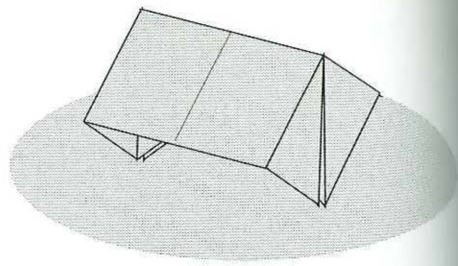
1.5

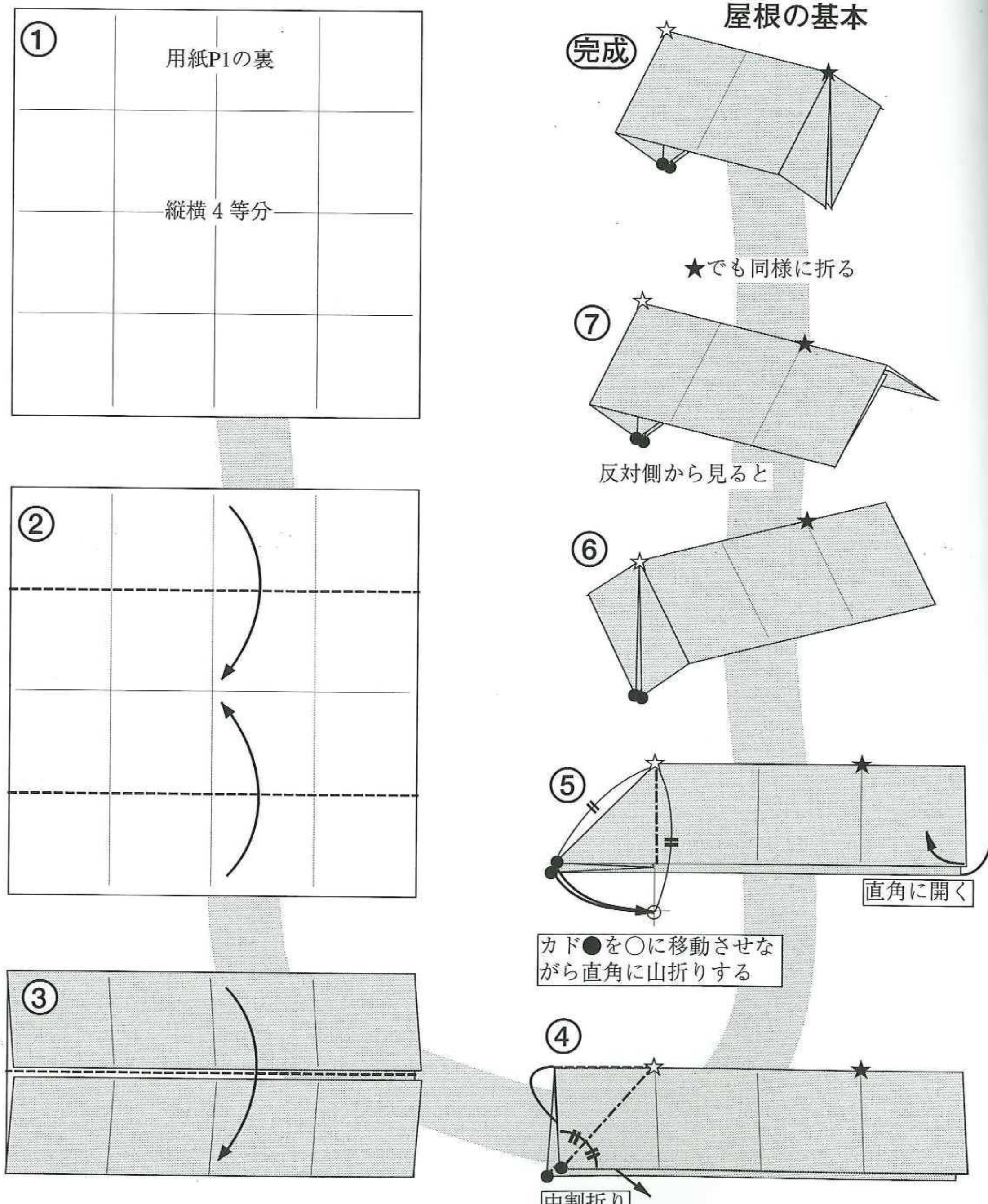


1.5 小さい家

屋根の基本 (P1)

家の大きさや形に応じて様々な形の屋根があります．まずすべてに共通する屋根の基本構造をマスターしましょう．

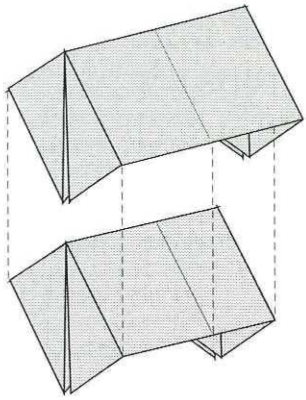


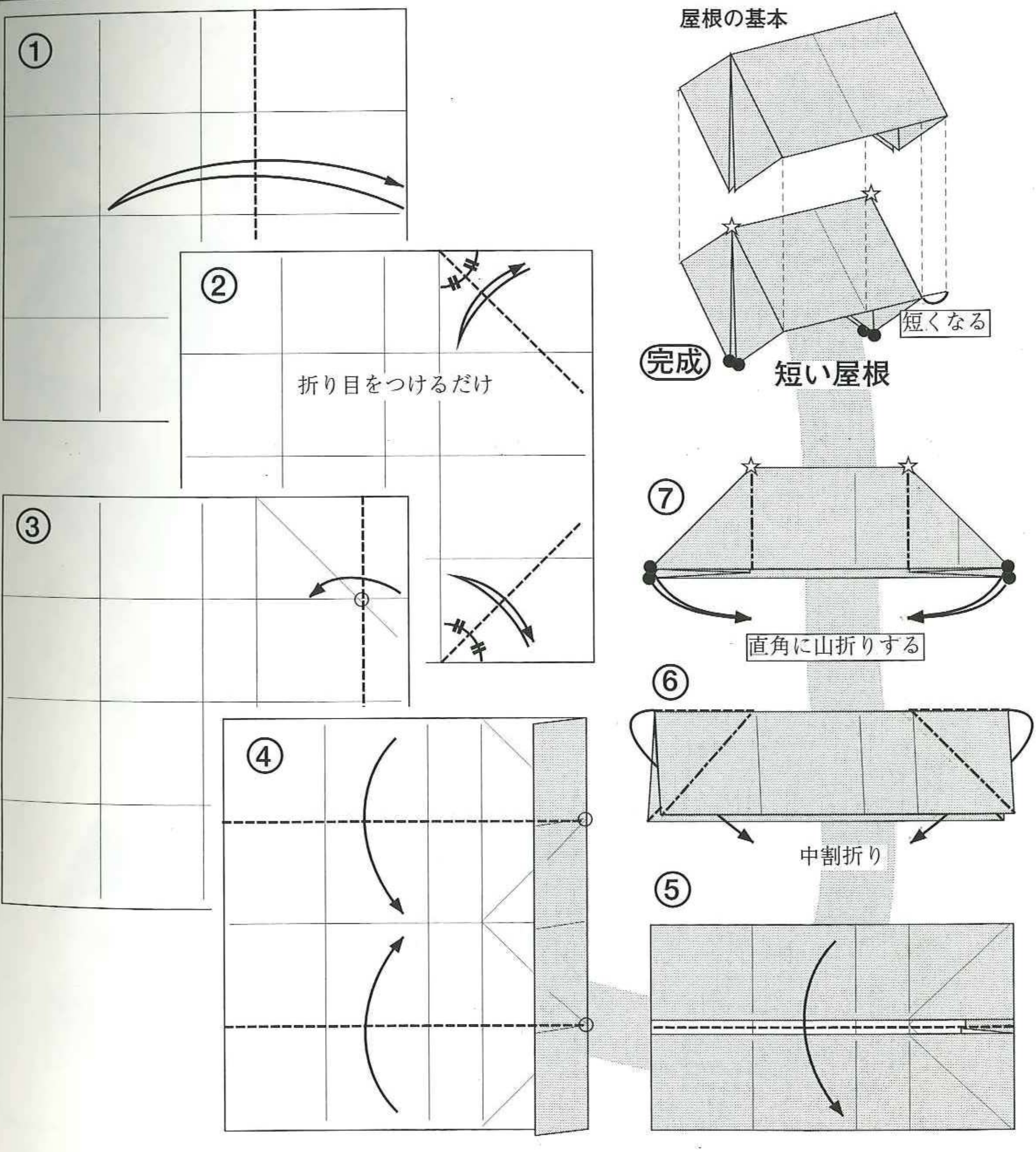


短い屋根

(P1または15cm×13cm)

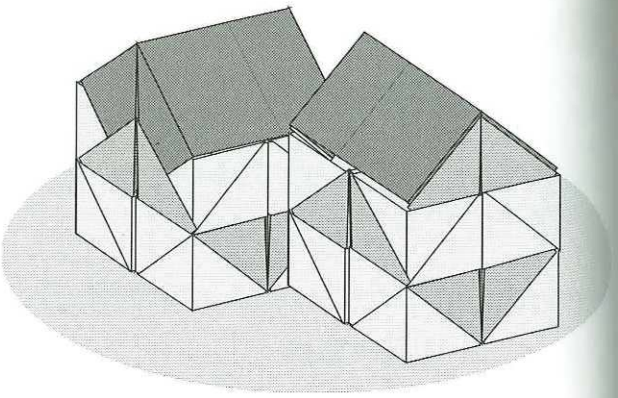
屋根の基本は**小さい家**には長すぎます．①～④は屋根の長さを合わせる作業です．15cm×13cmの用紙で折り始めれば，①～③をとばして**屋根の基本**と同じように折ることができます．



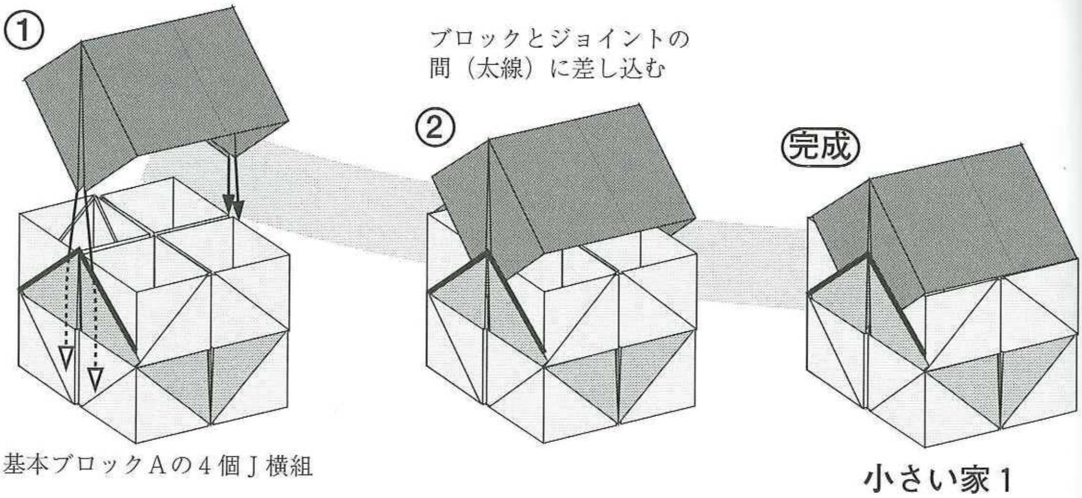


小さい家２種

（A×4＋J×6＋短い屋根）
小さい家の本体は，３３ページ基本ブロックAの４個J横組です．これに短い屋根を取りつけると小さい家ができます．
屋根の取りつけ方は**外差し**と**内差し**の２通りあります．

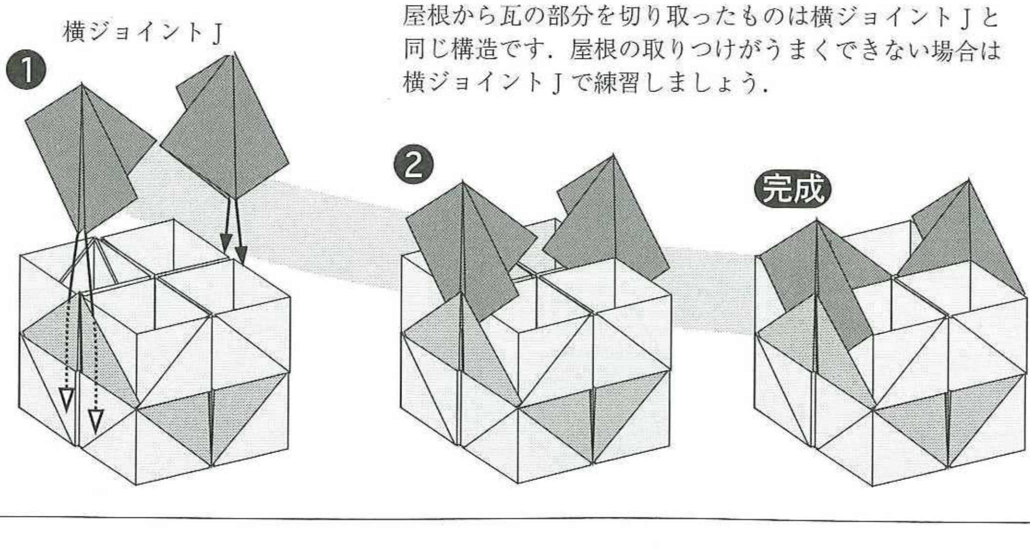


屋根の外差し



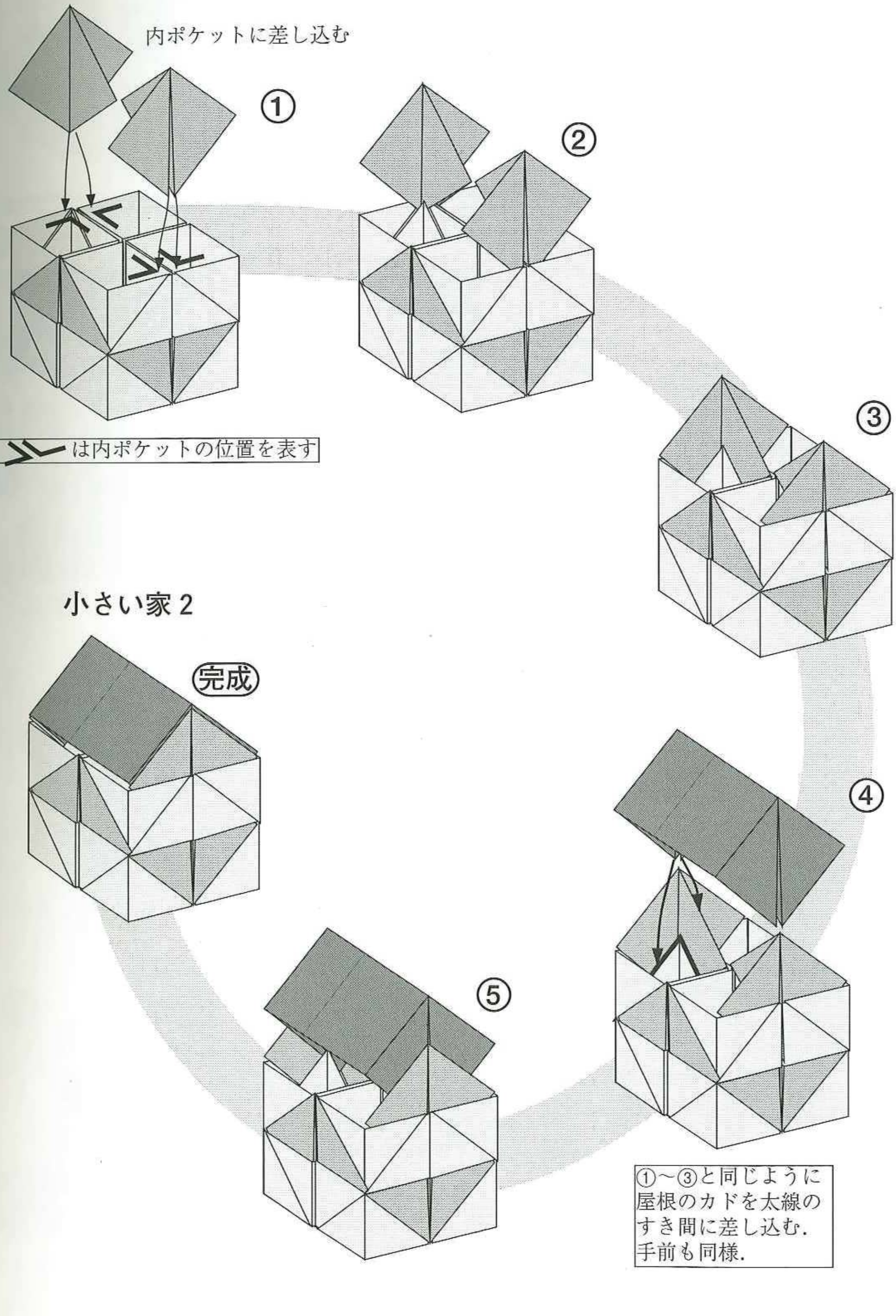
屋根の取りつけ練習

屋根から瓦の部分を切り取ったものは横ジョイントJと同じ構造です．屋根の取りつけがうまくできない場合は横ジョイントJで練習しましょう．



屋根の内差し

まず横ジョイントＪを差し込みます（①～③）．ジョイントを区別するために家本体（壁）と濃さを変えて図示していますが，同じにした方がよいでしょう．

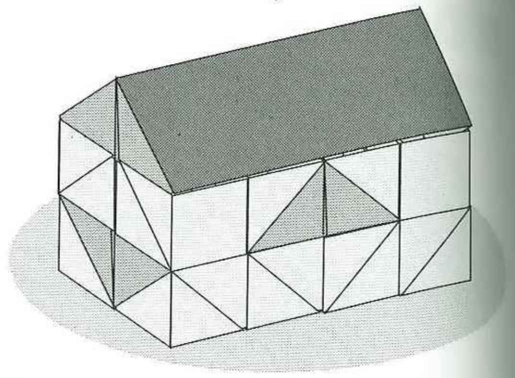


小さい家２

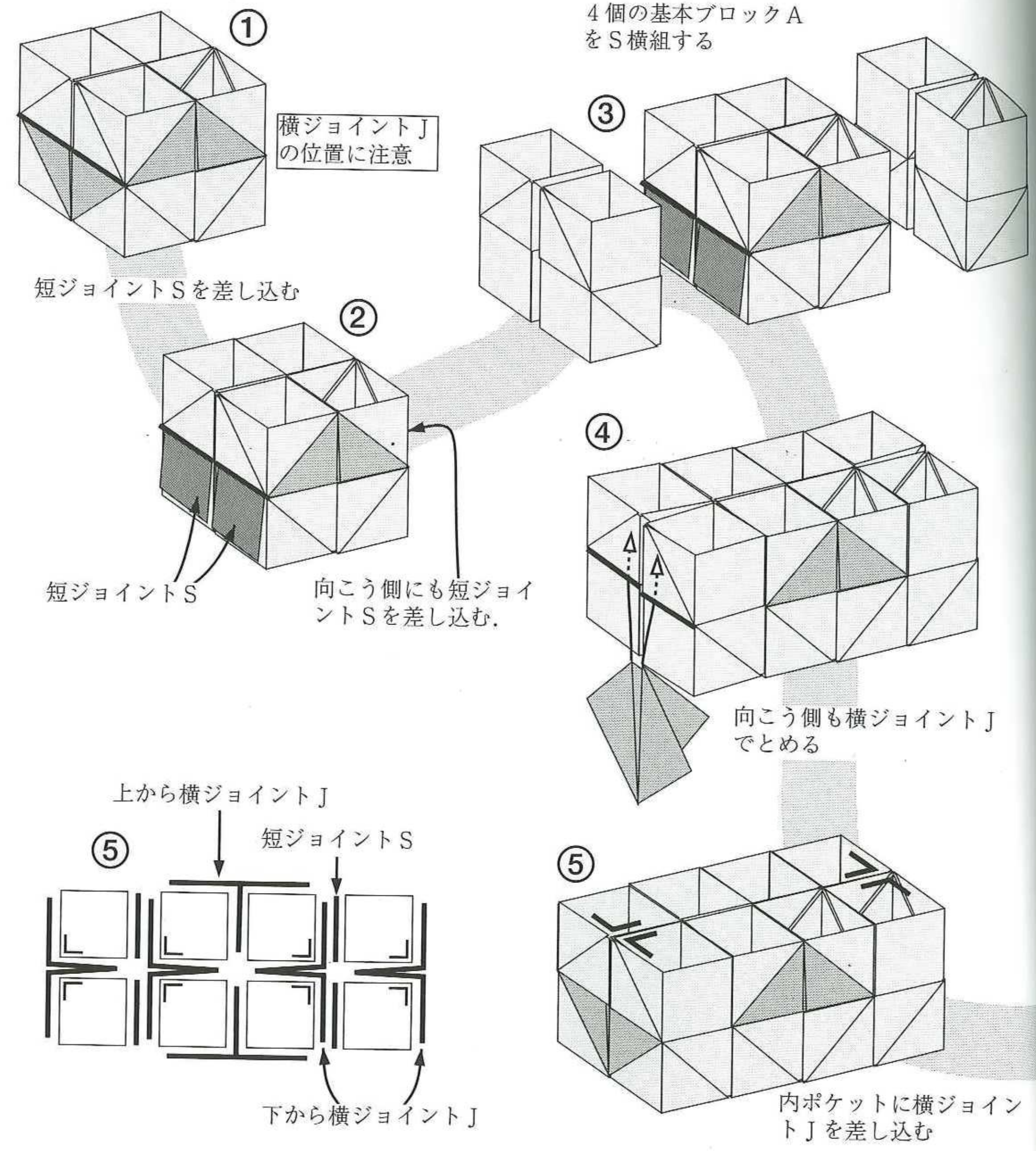
長い家 1

（A×8＋J×6＋S×4＋長い屋根）

長い家 1 の本体は，小さい家の本体に短ジョイントSで基本ブロックAを4個つないだものです．
屋根は次のページの**長い屋根**を使います．

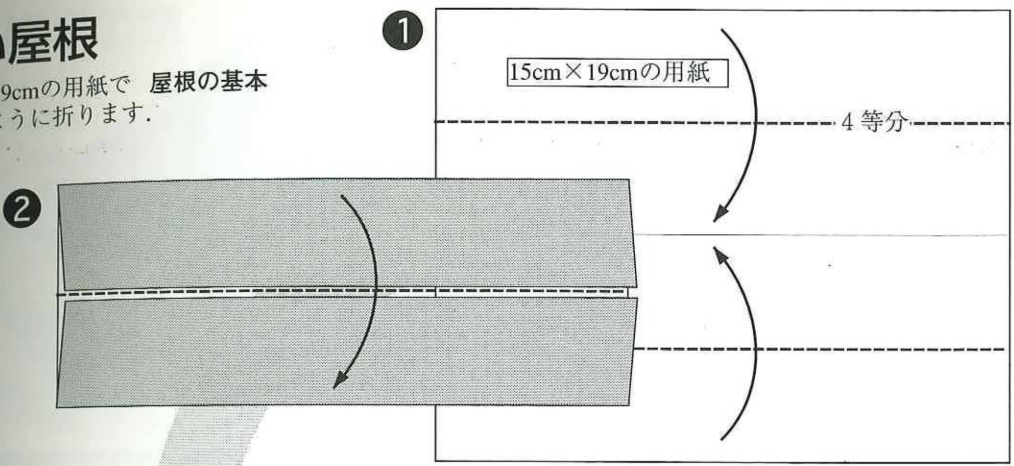


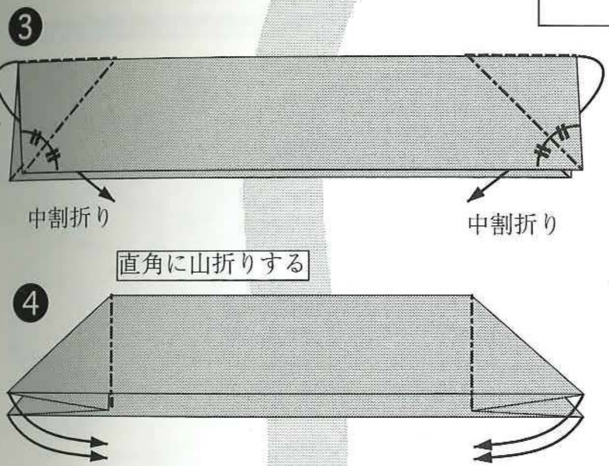
基本ブロックAの4個J横組

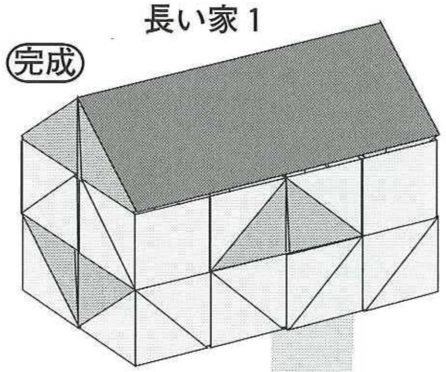


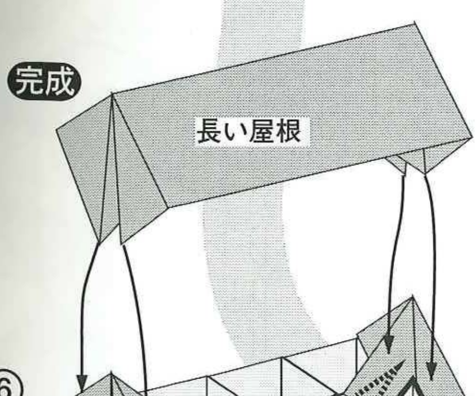
長い屋根

15cm×19cmの用紙で　**屋根の基本**
と同じように折ります.

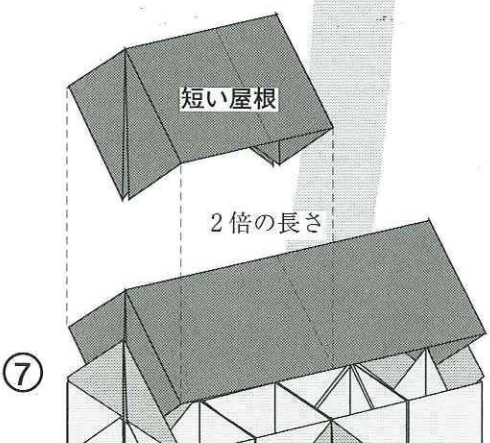






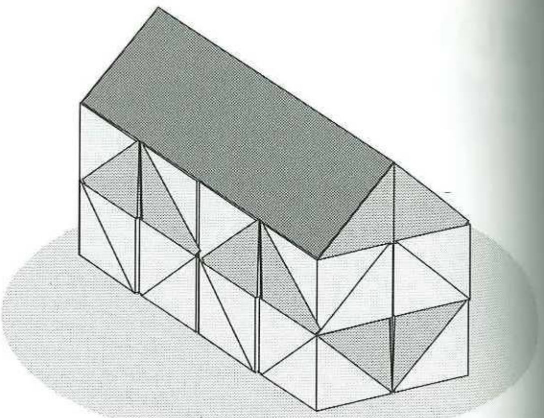


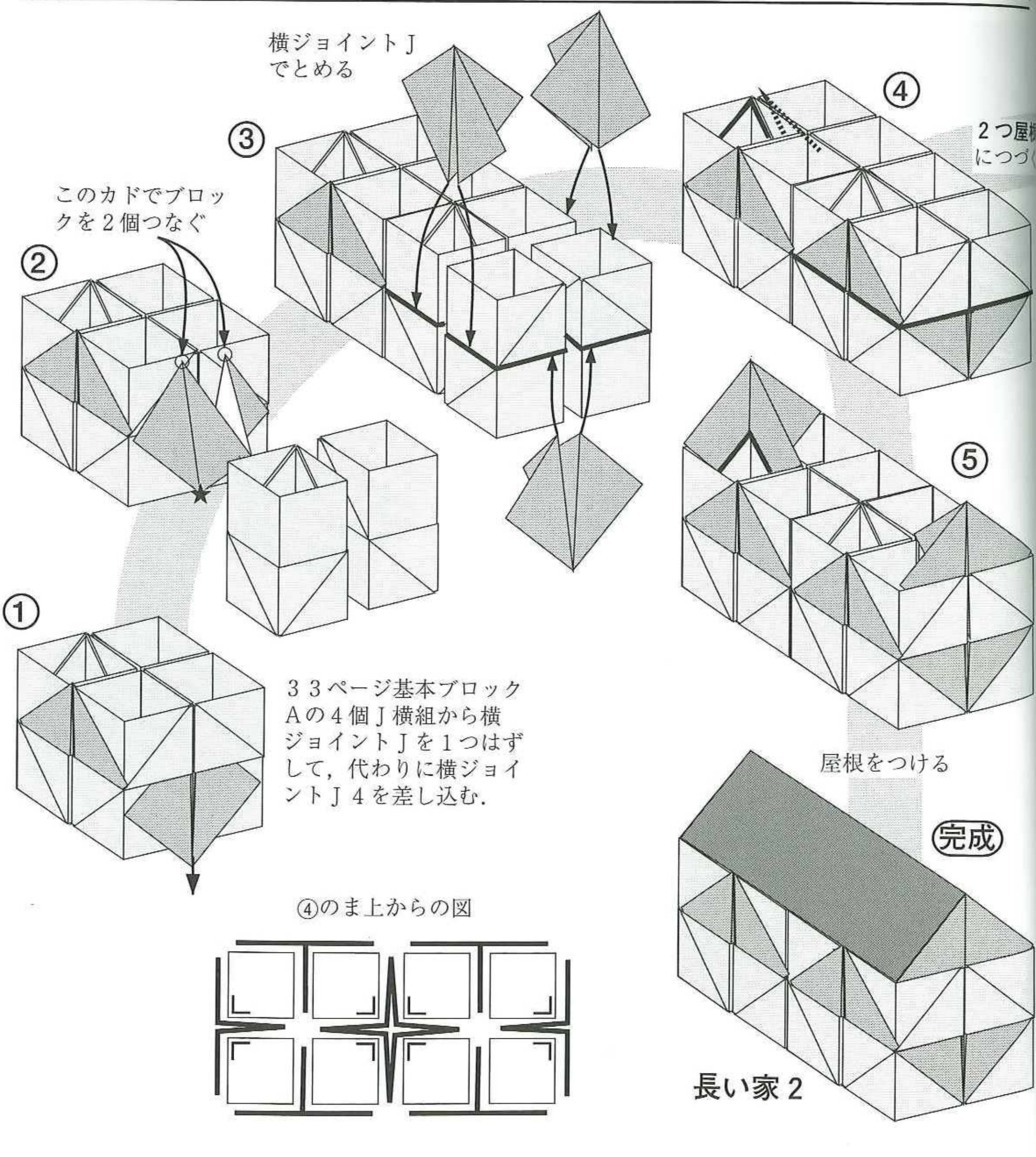
太線に屋根のカドを差し込む
左側も同様



長い家２

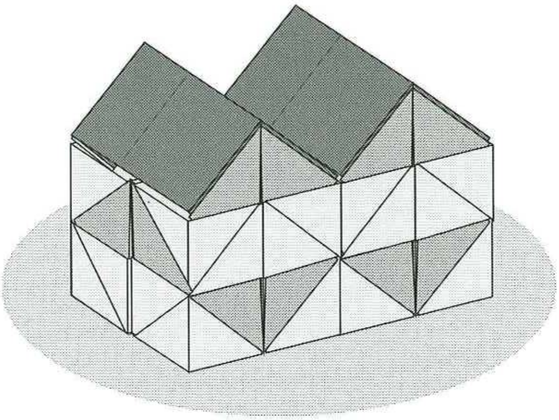
（A×8＋J×8＋J4＋長い屋根）
家本体のブロックの組み方が長い家１と異なるだけです．

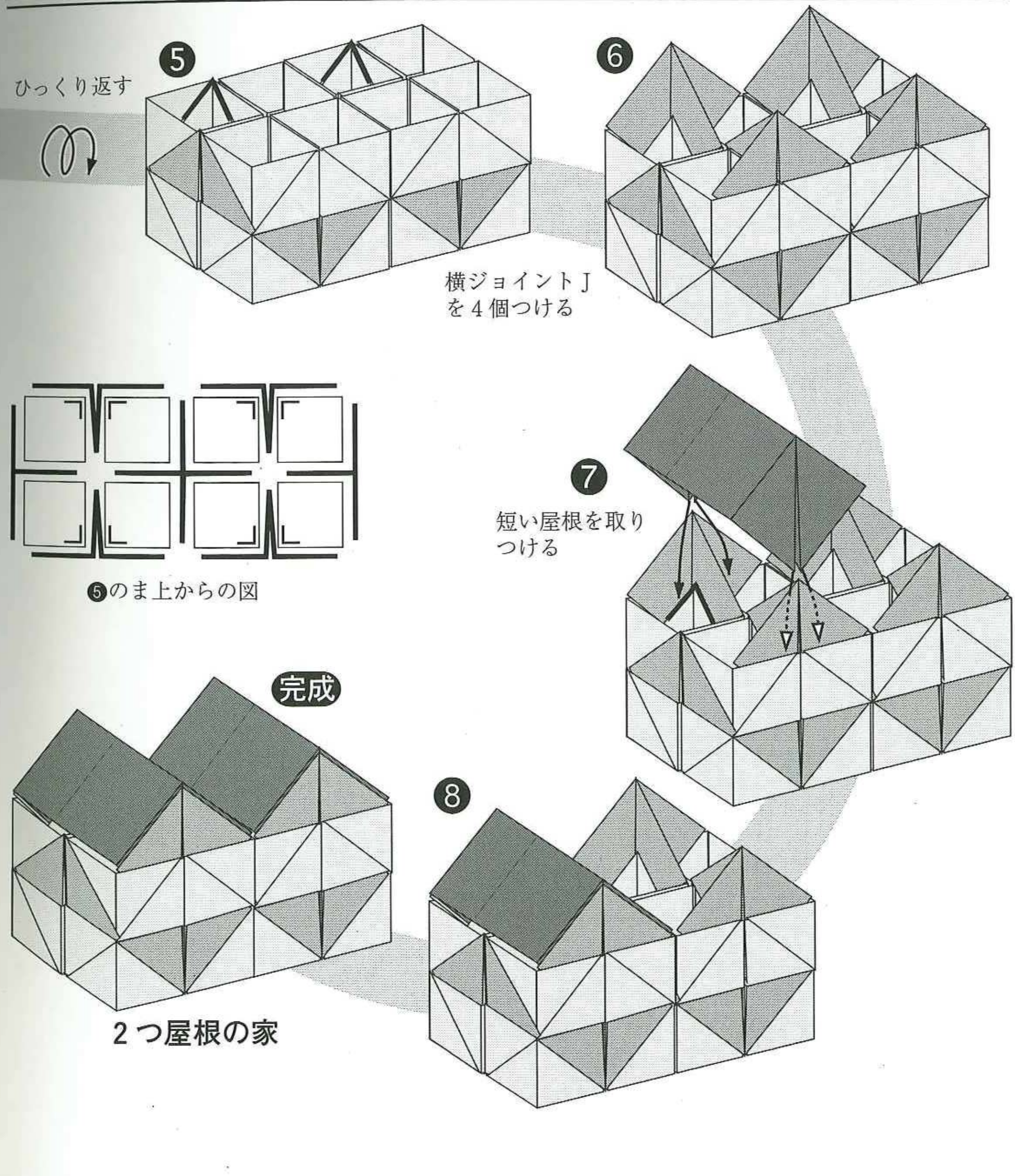




2つ屋根の家

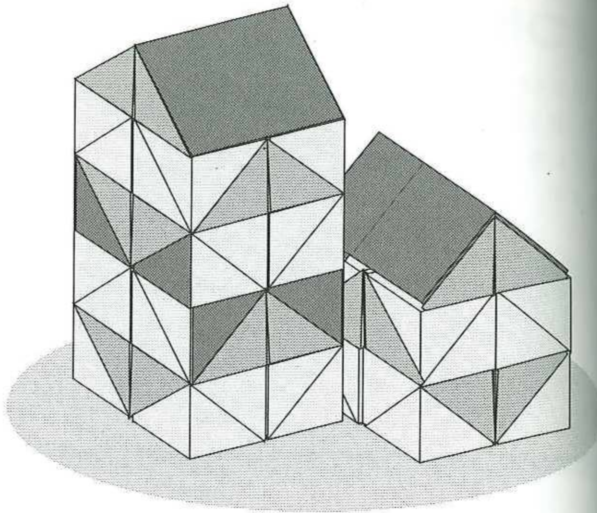
（A×8＋J×10＋J4＋短い屋根×2）
長い家2の本体をひっくり返すと，右図のように短い屋根を2つ取りつけることができます．



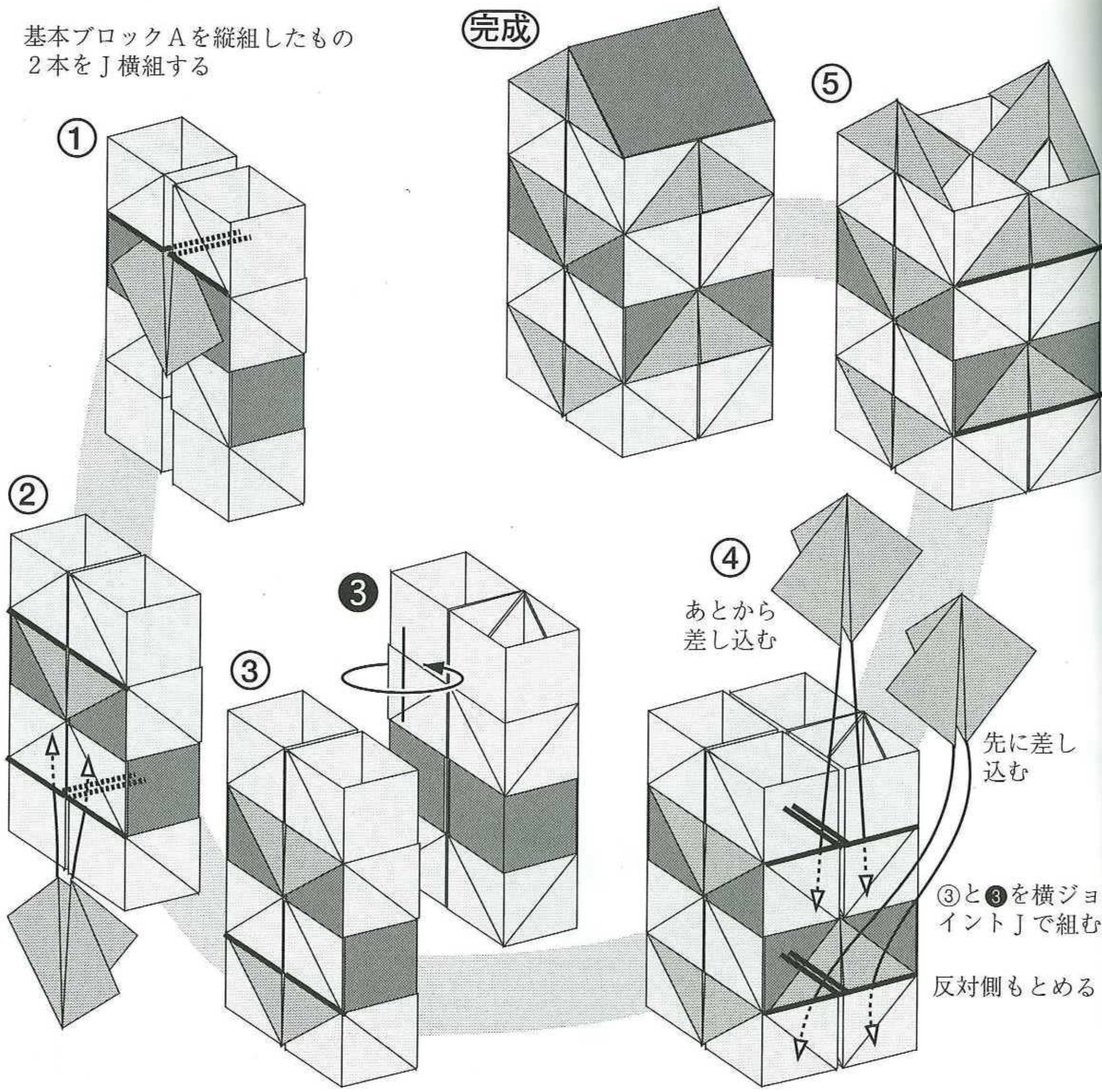


高い家

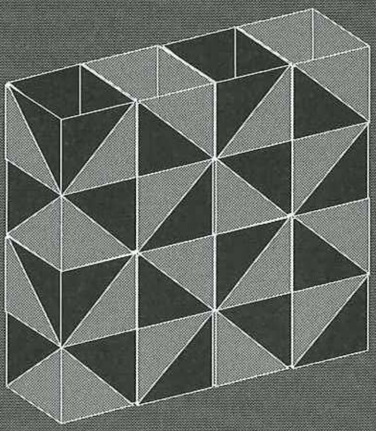
（A×8＋J×10＋短い屋根）
基本ブロックAを縦組したものを４本束ねてJ横組します．
これに屋根をつけたものが**高い家**です．



基本ブロックAを縦組したもの
２本をJ横組する



1.6

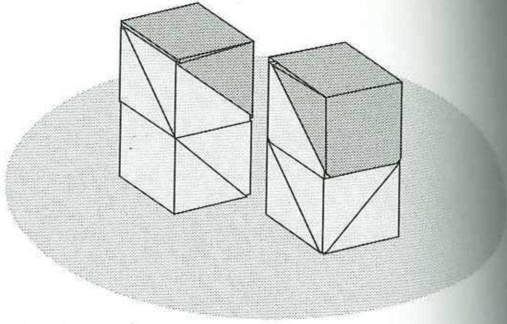


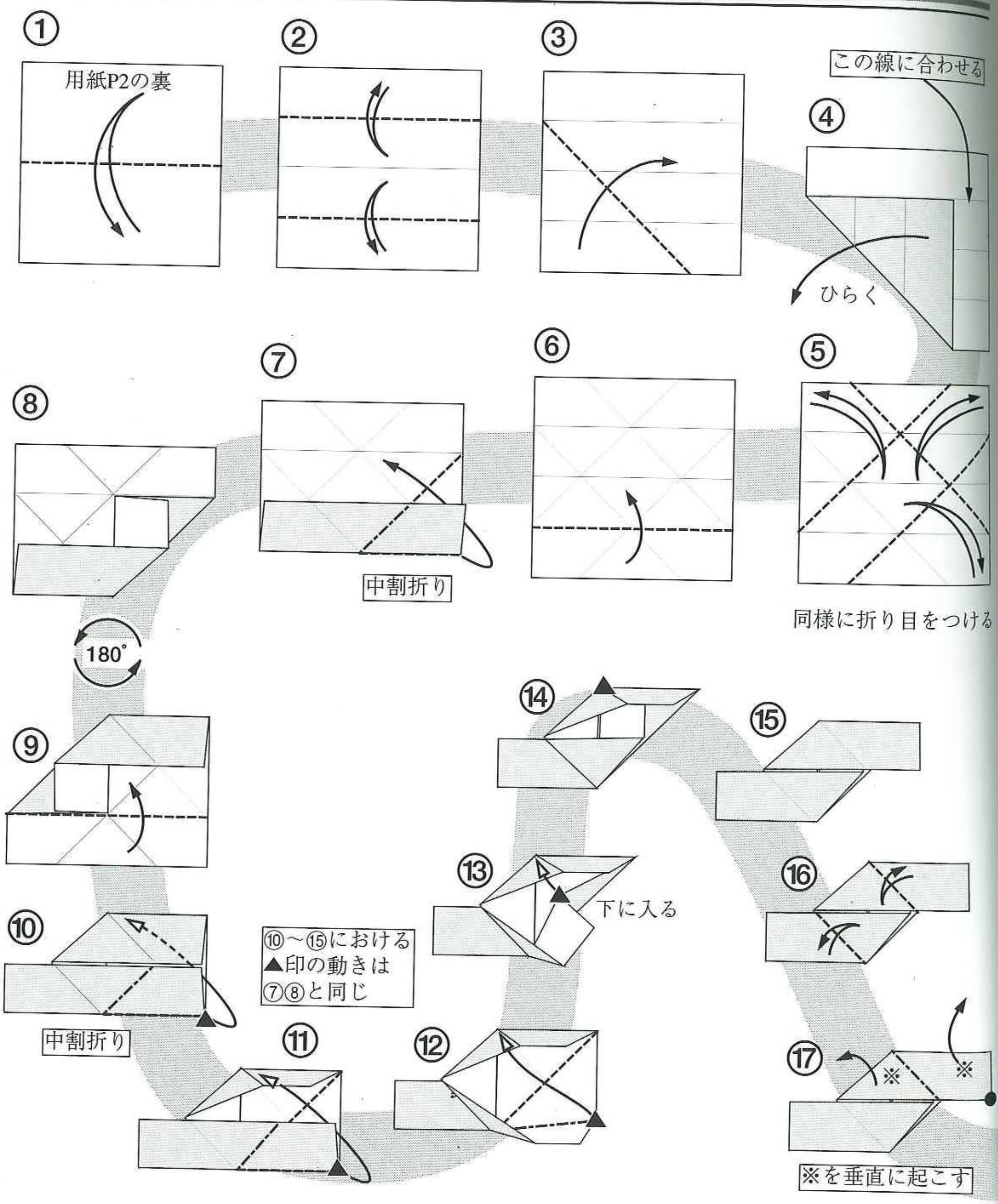
1.6 ふたとつめ

正ふた
逆ふた
つめ
大量生産 2
大量生産 3

正ふた (P2)

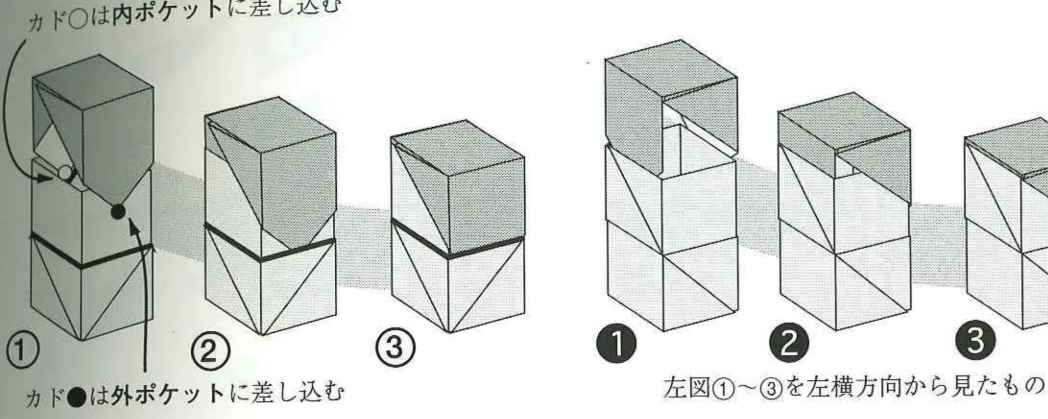
基本ブロックAは上下に穴があいているので，横から力を加えると簡単につぶれます．しかし**正ふた**をすると穴が正方形に固定されるので変形しません．

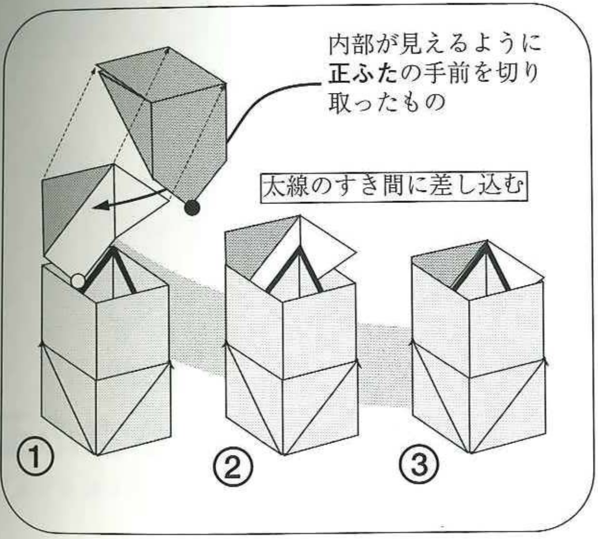


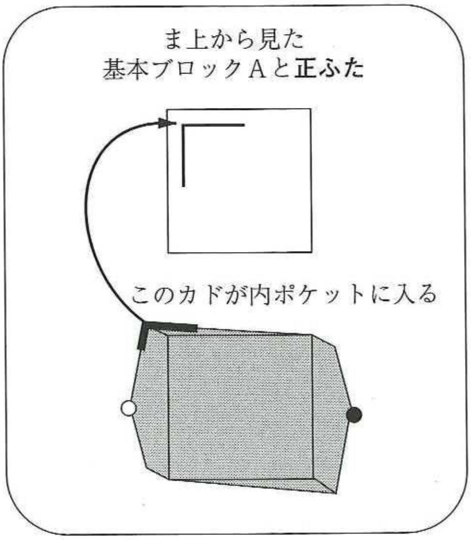


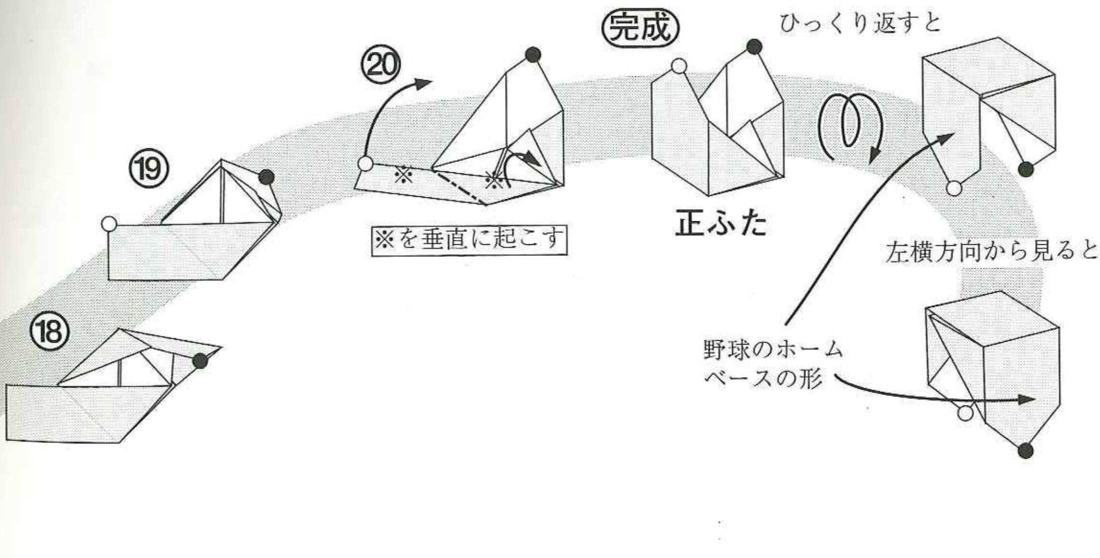
正ふたのつけ方

正ふた完成図のカド●とカド○の一方を**内ポケット**に，もう一方を**外ポケット**に差し込みます．



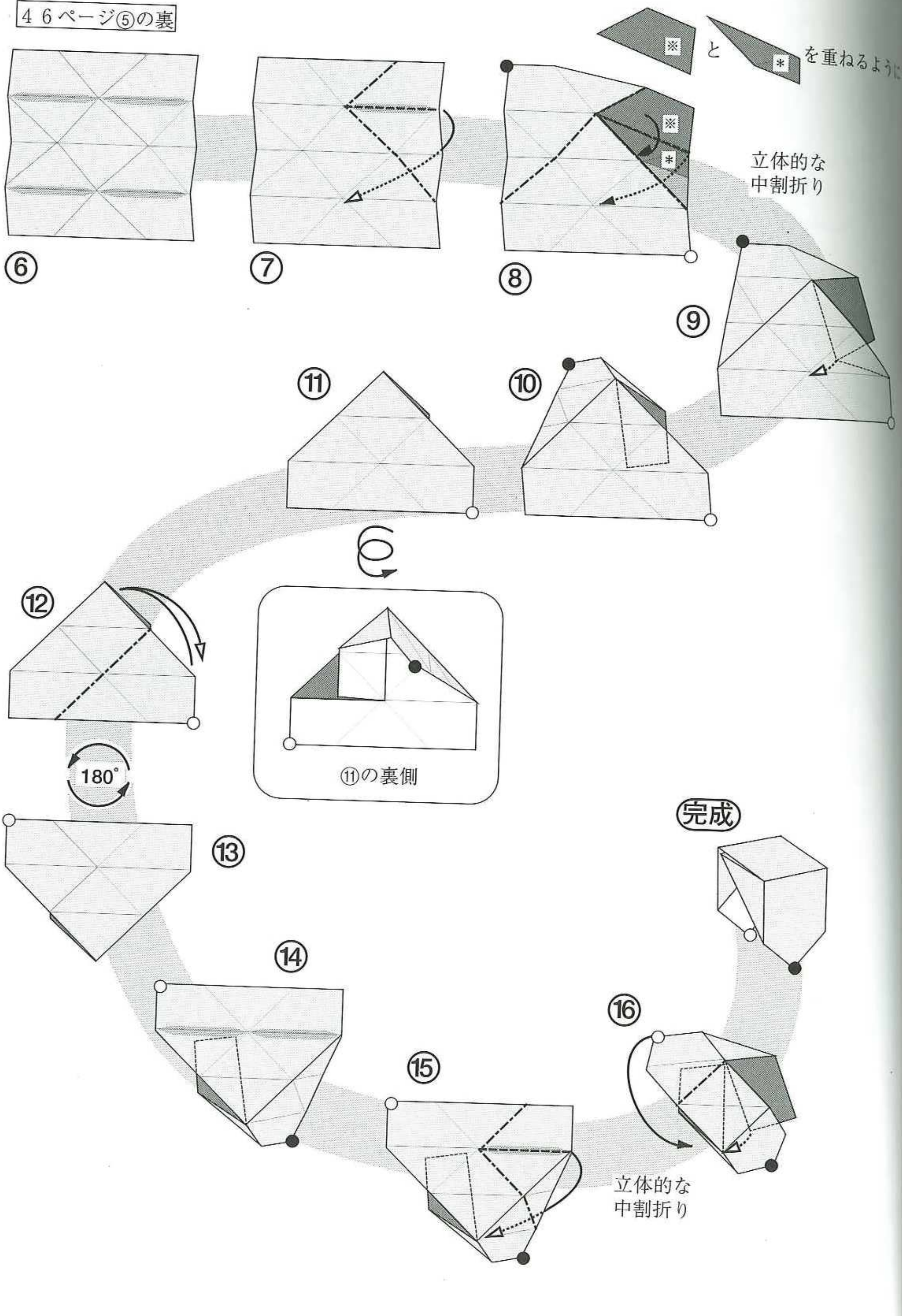






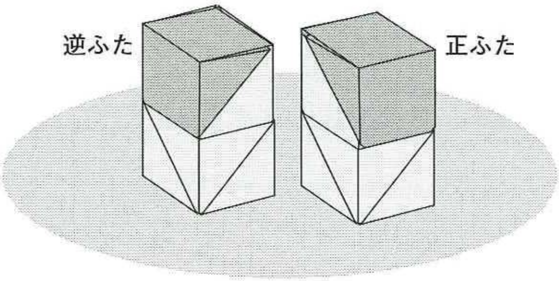
正ふたのスムーズな折り方

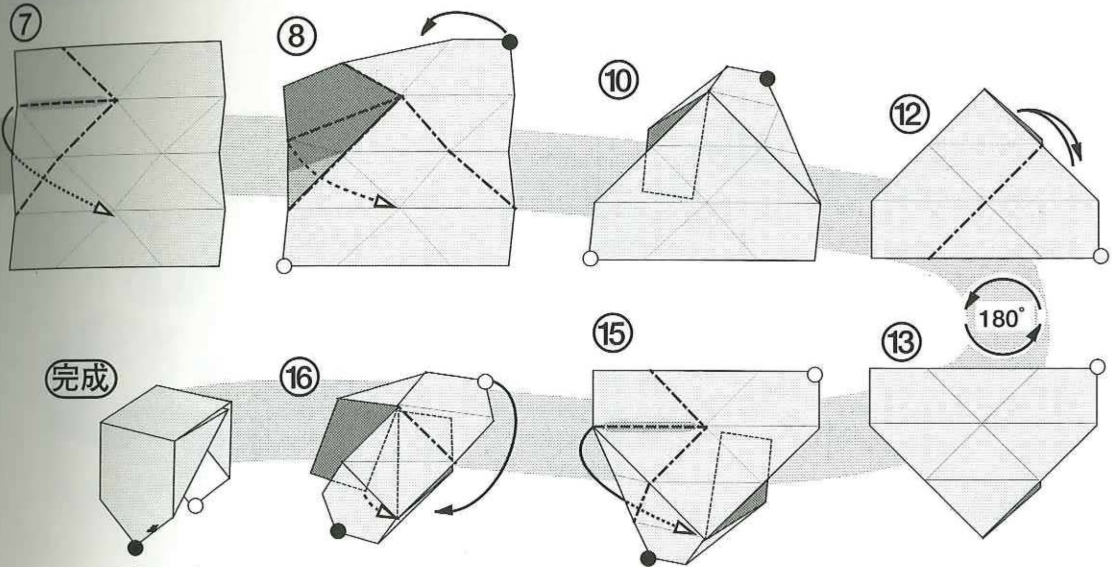
正ふたの構造がわかったら以下のように折った方が簡単です．



逆ふた (P2)

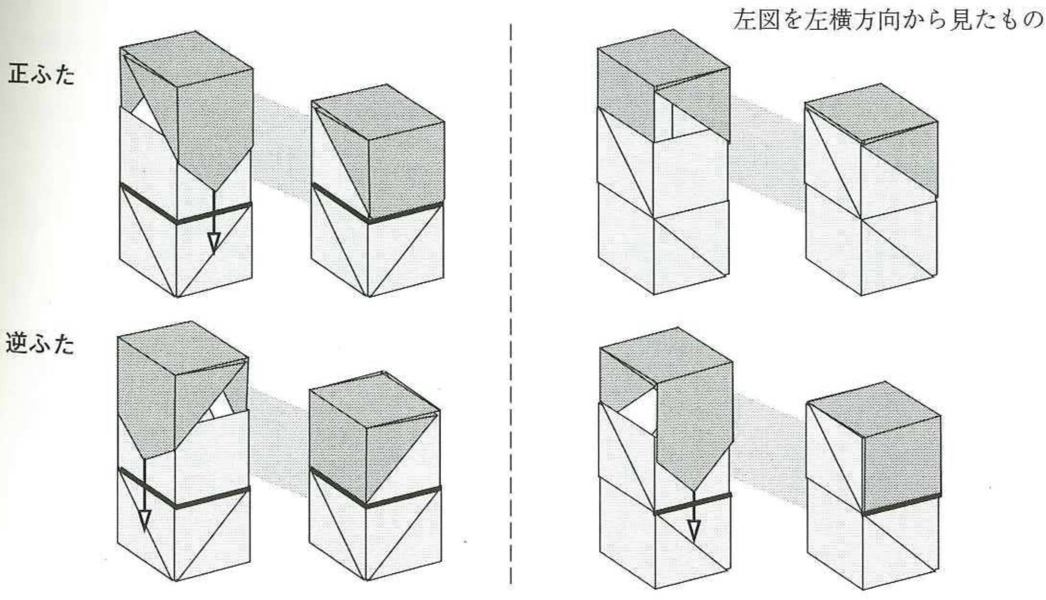
正ふたの折り図を鏡に映したように逆にして折ったものを逆ふたとよびます．工程の一部は省略しています．





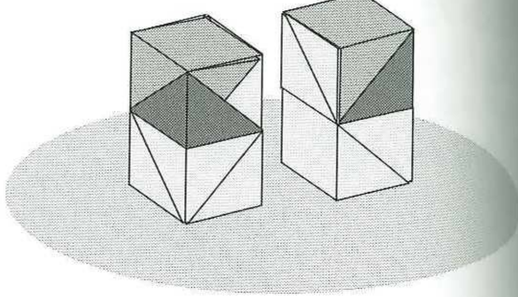
正ふたと逆ふたの違い

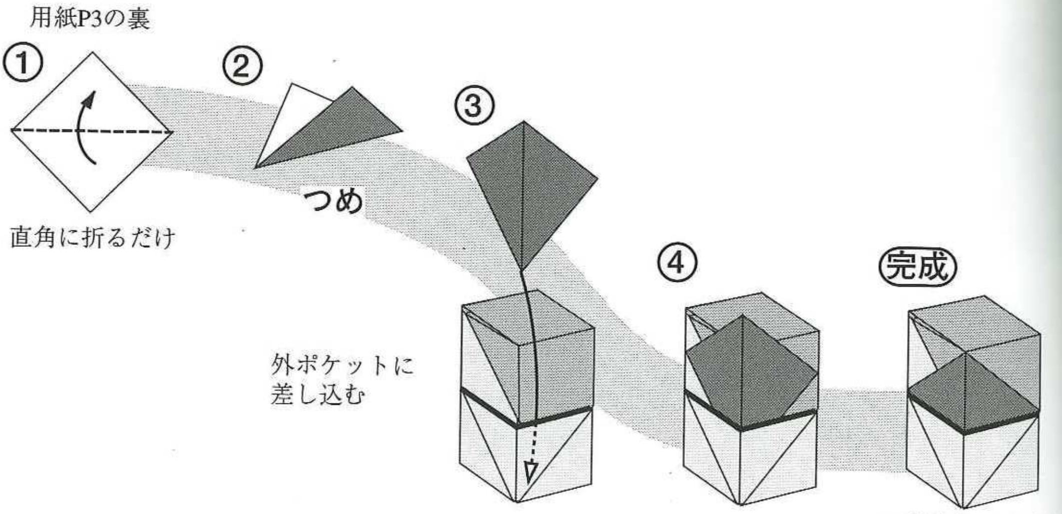
正ふたと逆ふたではポケットへの入り方が違います．



つめ (P3)

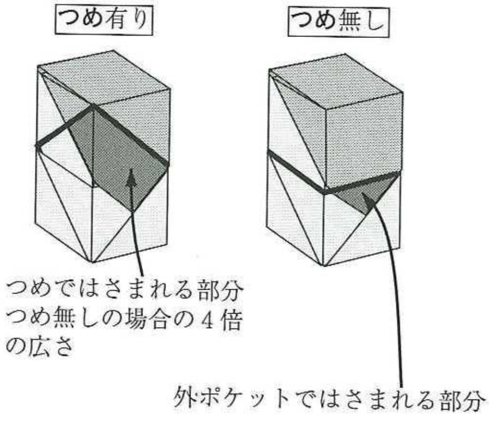
P3は用紙P2を縦横半分にしたものです．
つめは**ふた**を固定する部品ですが，ブロックに模様をつける効果もあります．





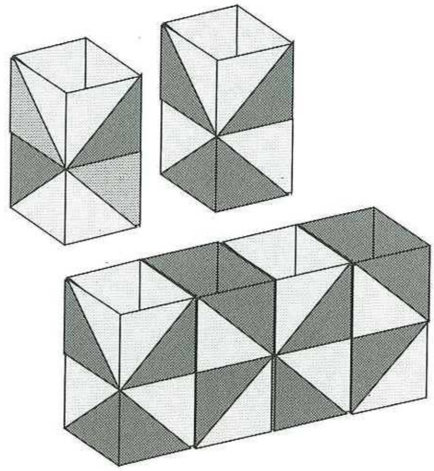
つめの効用1

下図のように**つめ**がついていると，はさまれる部分が広くなって，**ふた**がしっかりと固定されます．



つめの効用2

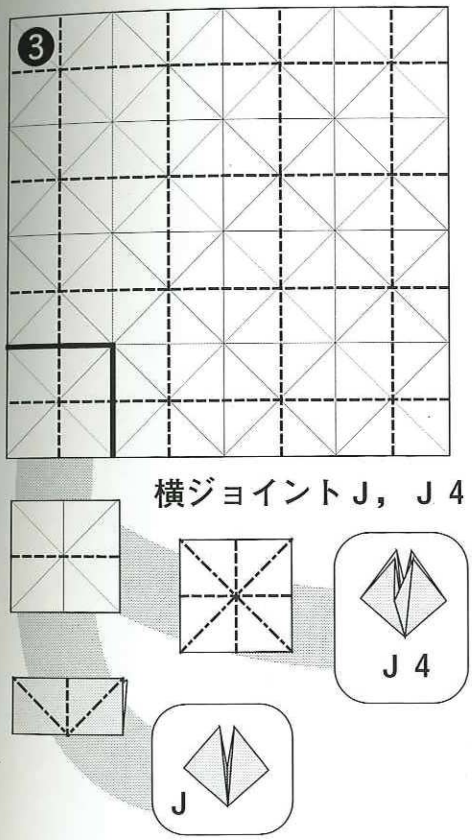
くちばし，**半くちばし**，**つめ**の色を工夫すると，下図のように，きれいな模様を作ることができます．



大量生産２ (P1)

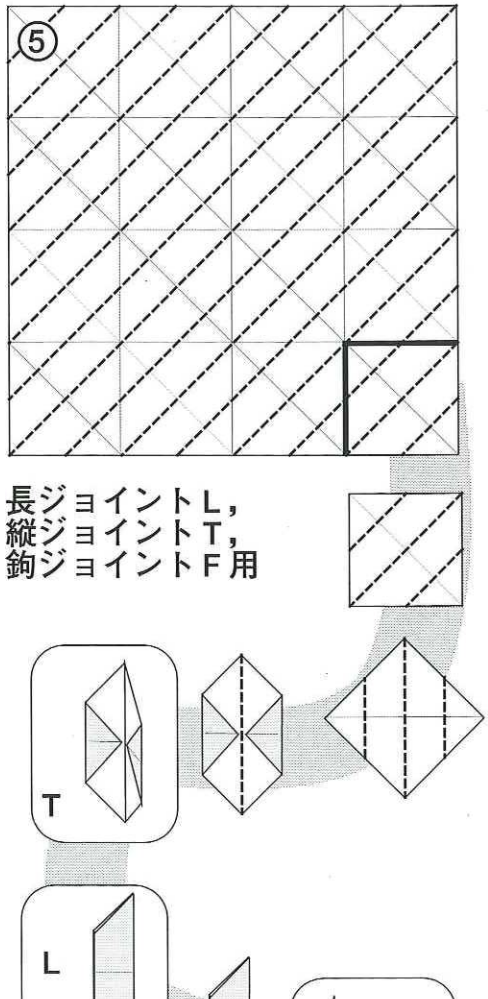
横ジョイントＪ，Ｊ４，縦ジョイントＴ，長ジョイントＬ，鉤ジョイントＦ（９６ページ），短ジョイントＳを大量生産しましょう．

２２ページ**大量生産１**の②から



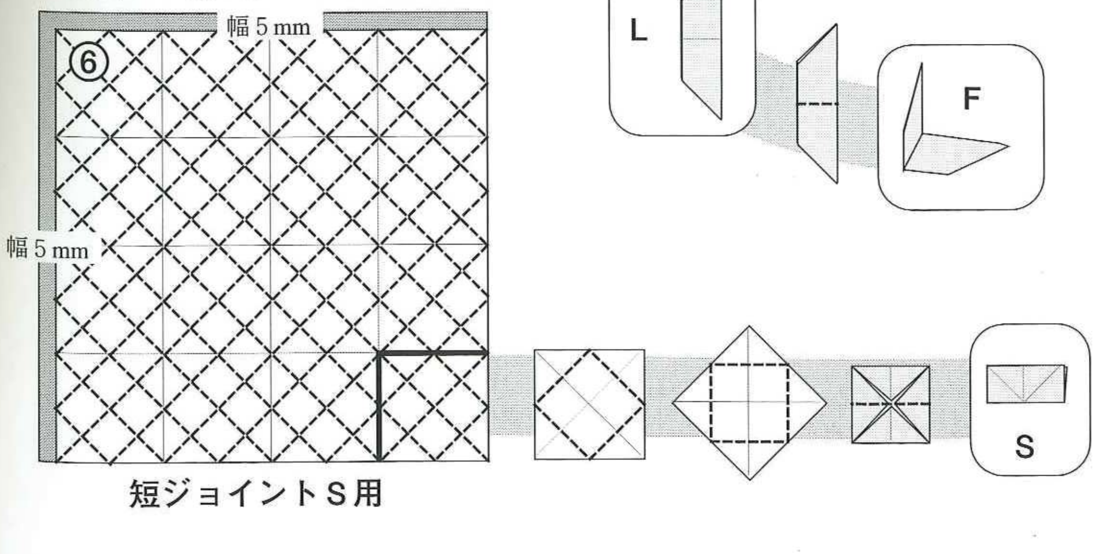
横ジョイントＪ，Ｊ４用

大量生産１の④から



長ジョイントＬ，
縦ジョイントＴ，
鉤ジョイントＦ用

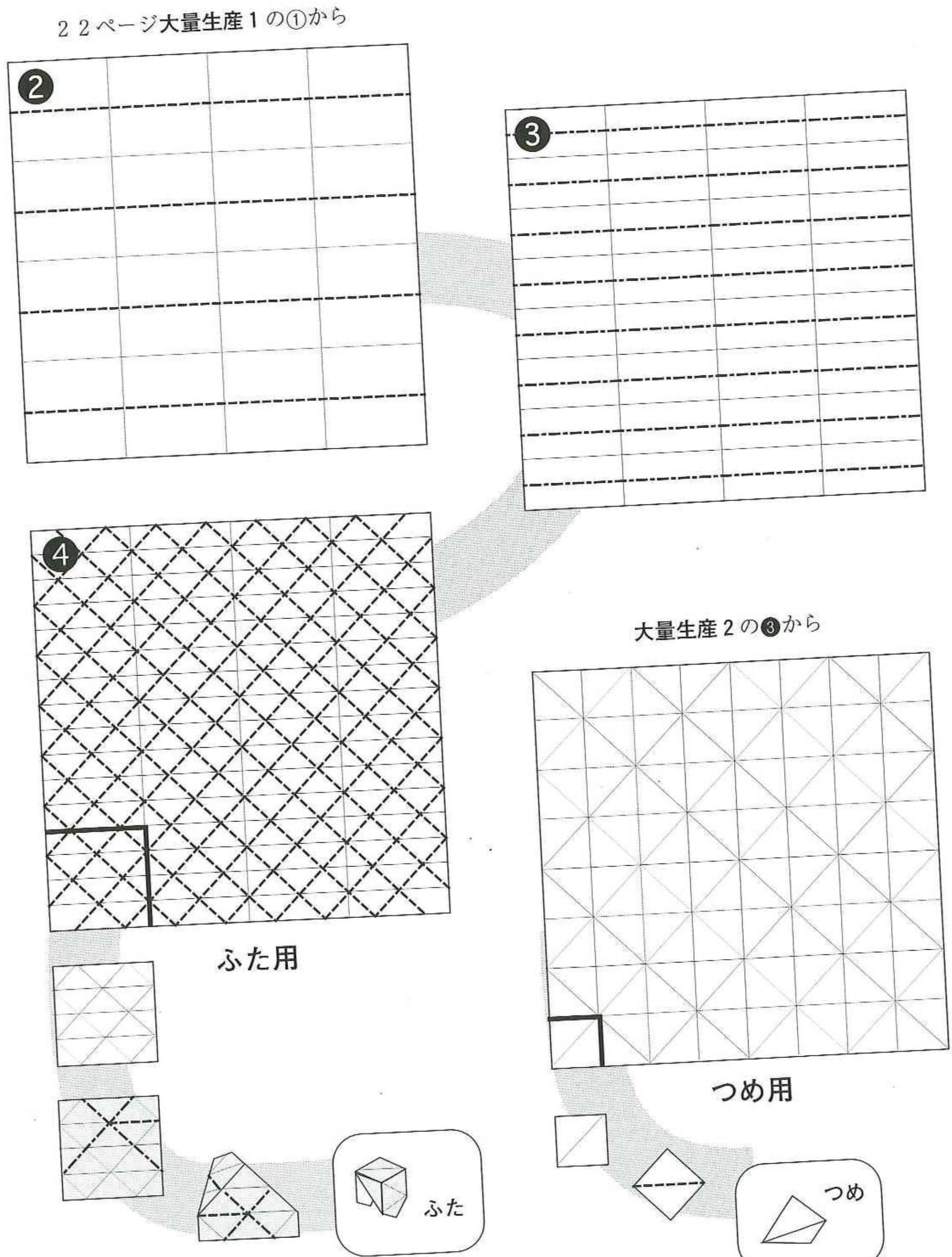
用紙P1の上と左５mmくらいを切り取り
大量生産２の⑤を折る



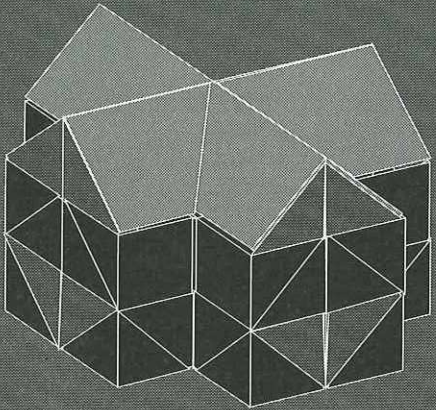
短ジョイントＳ用

大量生産３ (P1)

ふたとつめを大量生産しましょう．



1.7

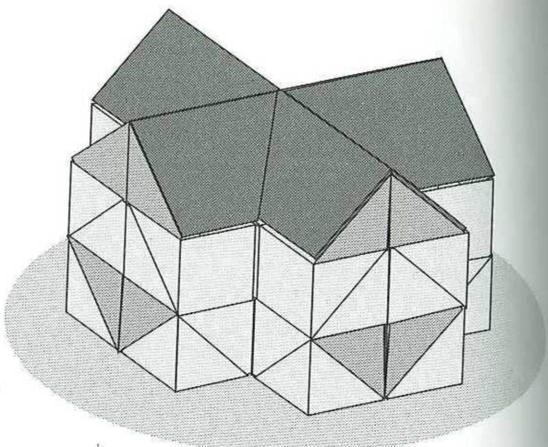


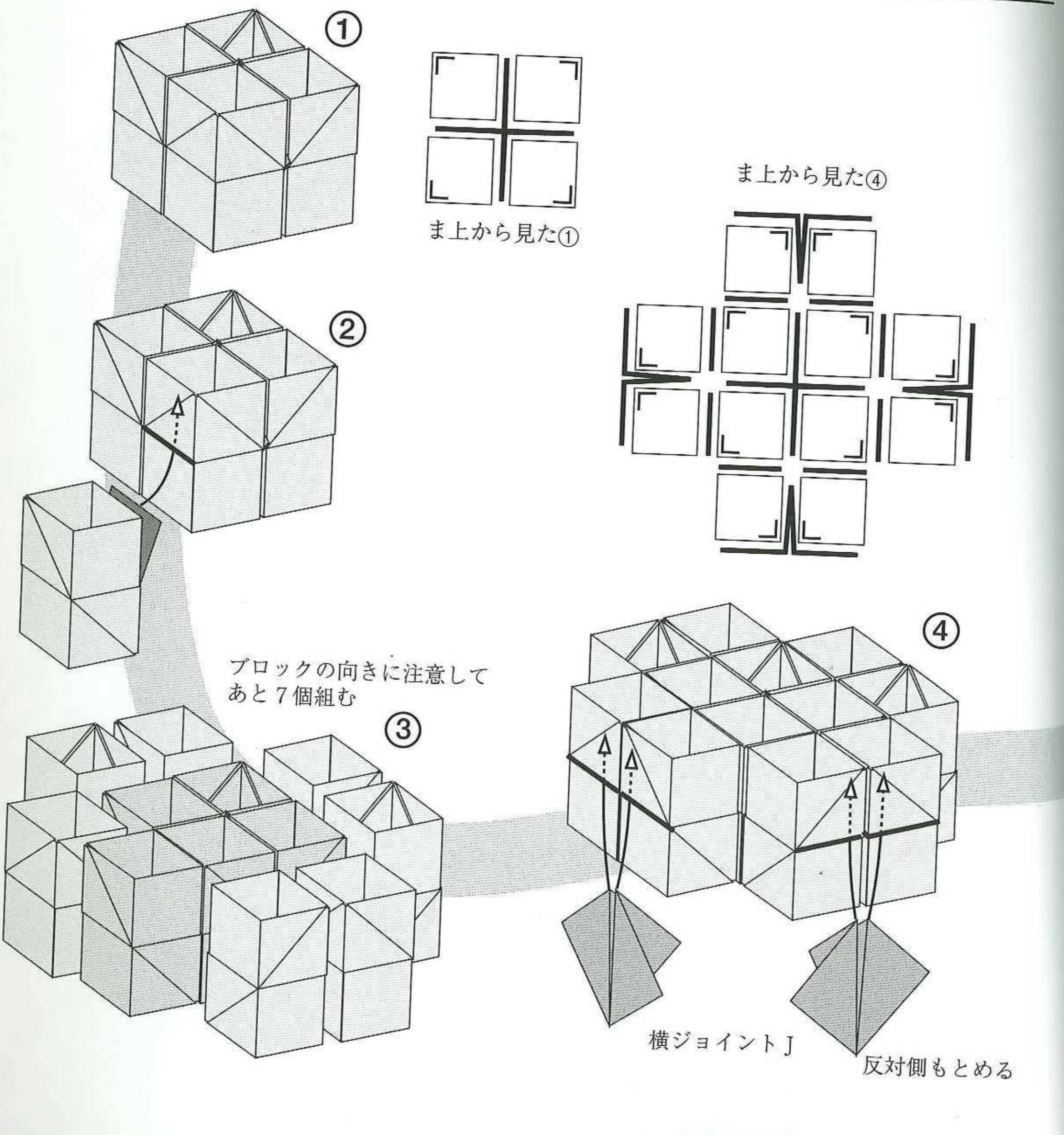
1.7 十字家

十字家
街の壁（見張りの通路）
小さい木

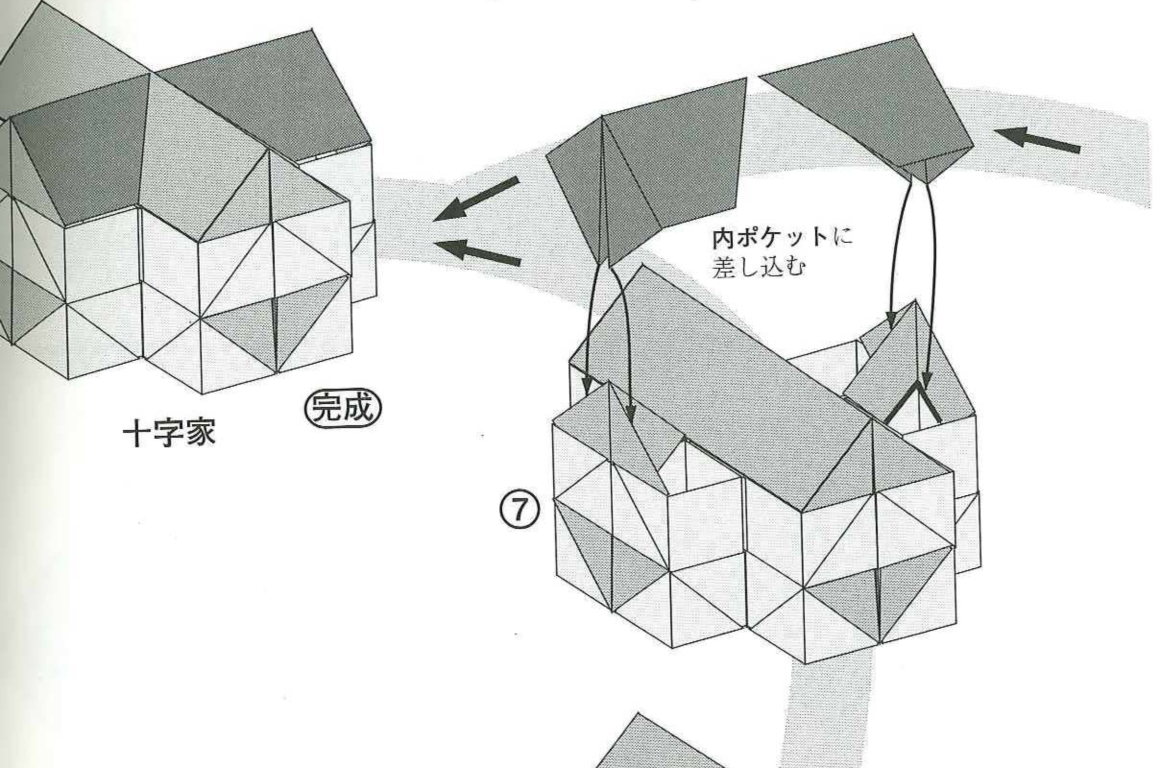
十字家（A×12＋J×8＋J4＋S×8＋長い屋根＋張り出し屋根×2）

横ジョイントJ４で基本ブロックAを４個横組したもの（３４ページ）に**張り出し部分**となる基本ブロックAを短ジョイントSで８個つけ，長い屋根と**張り出し屋根**（５６ページ）をつけると，右のような十字屋根の家ができます．





張り出し屋根の取りつけ

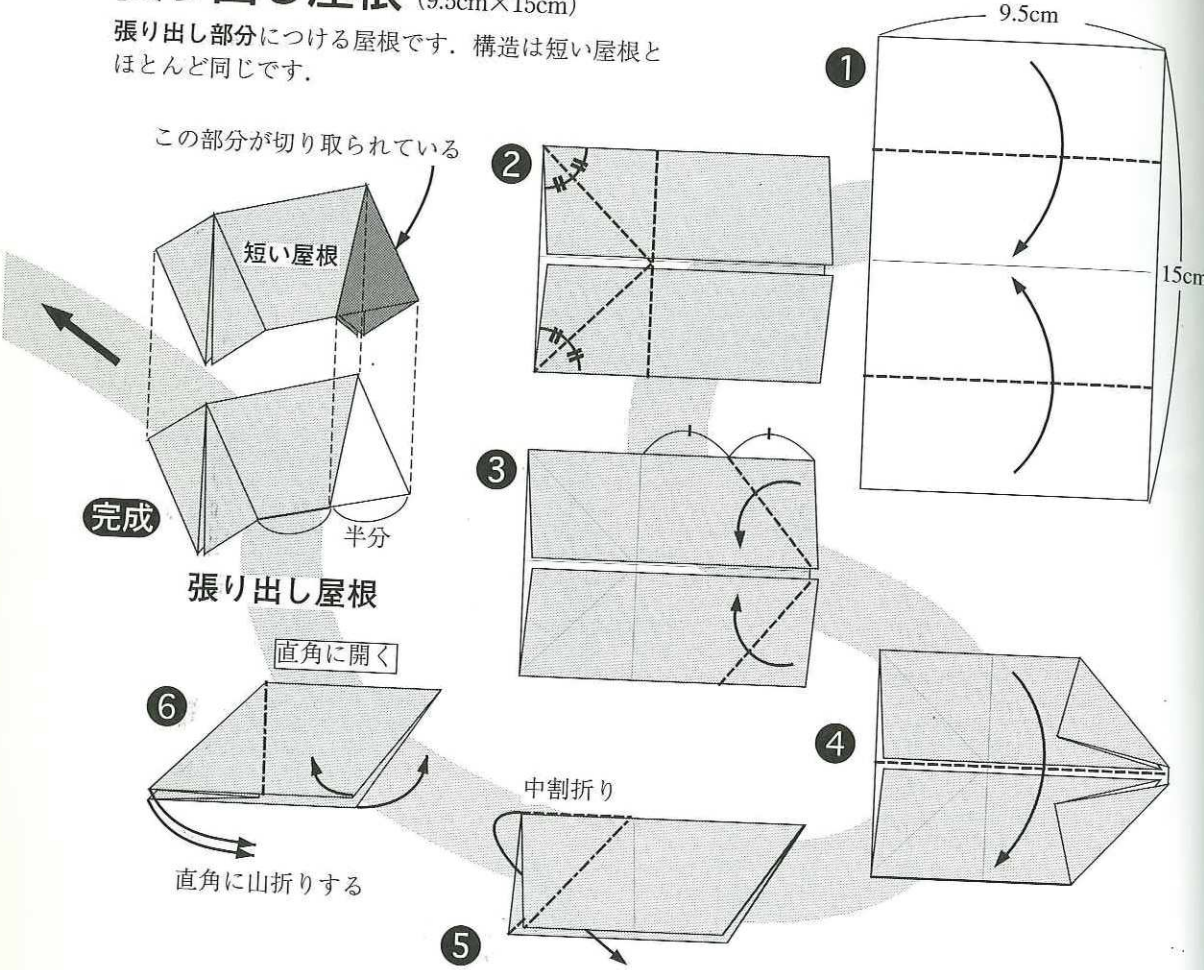


長い屋根をつける

上から横ジョイントＪを４個差し込んで**十字家**の本体完成

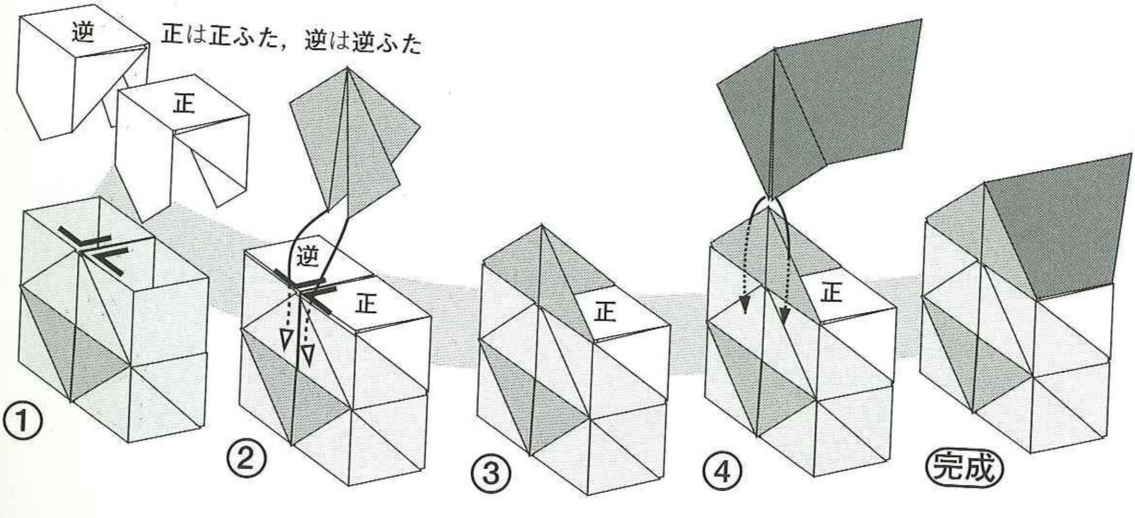
張り出し屋根 (9.5cm×15cm)

張り出し部分につける屋根です．構造は短い屋根とほとんど同じです．



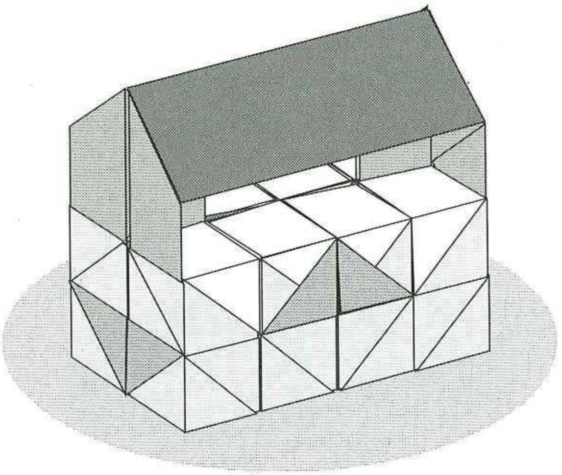
張り出し屋根の補強

基本ブロックAにふたをしておくと張り出し屋根がしっかりと固定されます．ふたは正ふたと逆ふたが一対になってつきます．



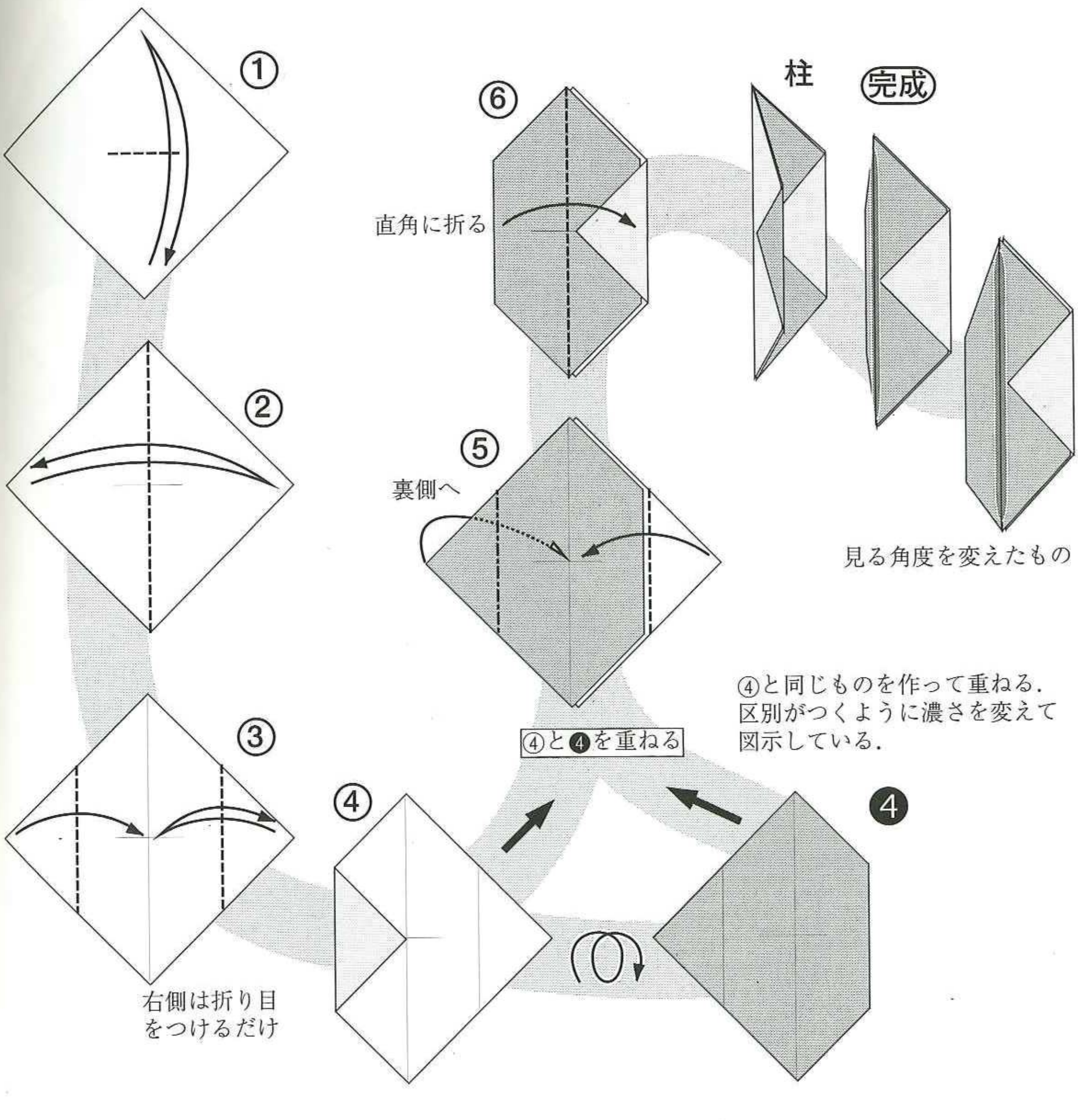
街の壁（見張りの通路）

（長い家１の⑤（A×8＋J×6＋S×4）＋正ふた×4＋逆ふた×4＋柱×4＋長い屋根）
ヨーロッパの古い街を囲む壁を作りましょう．
街の壁の一部は見張りのための通路や番人部屋になっています．十字家で屋根の下に隠れたふたは街の壁では通路の床になります．



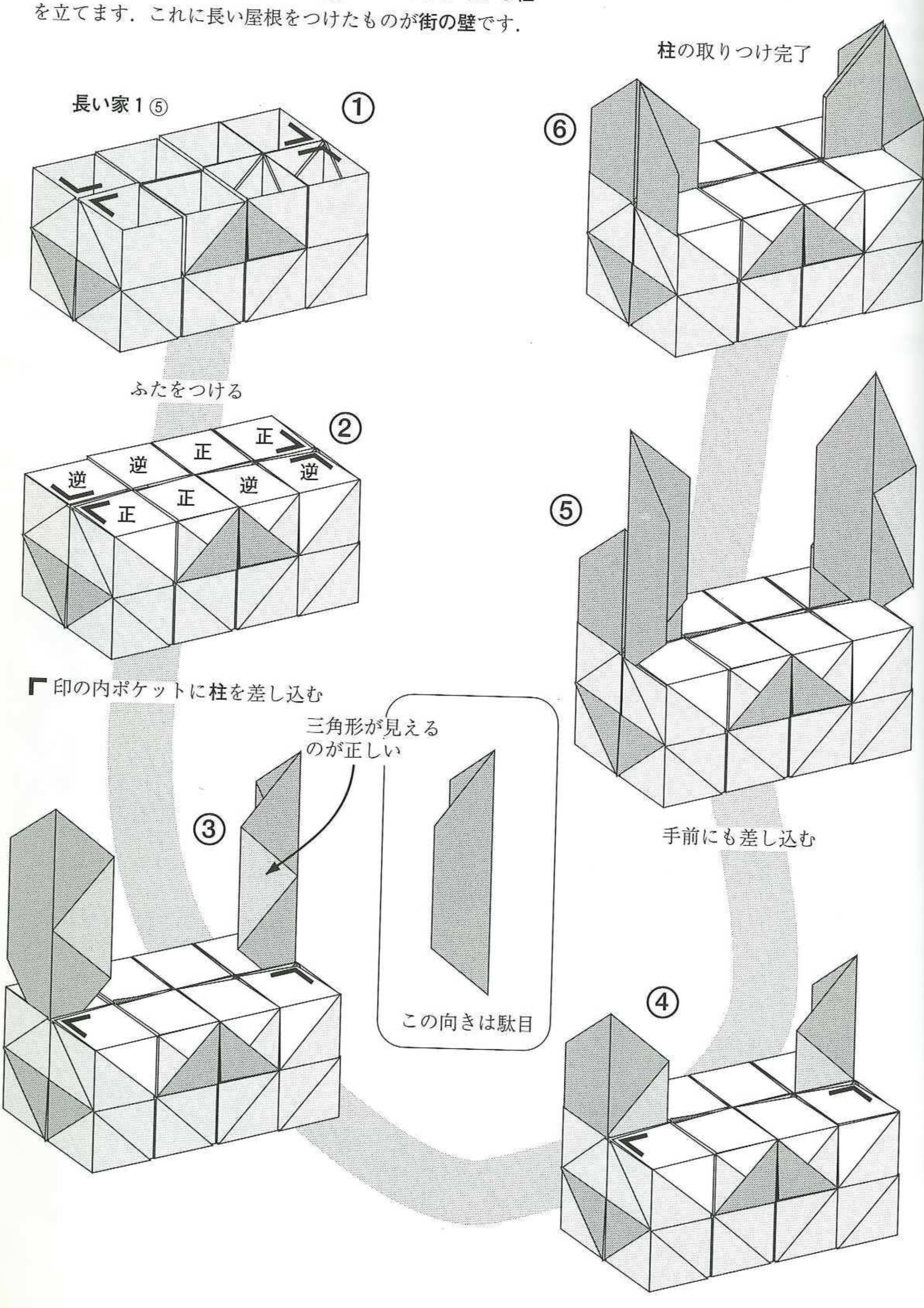
柱 (P2)

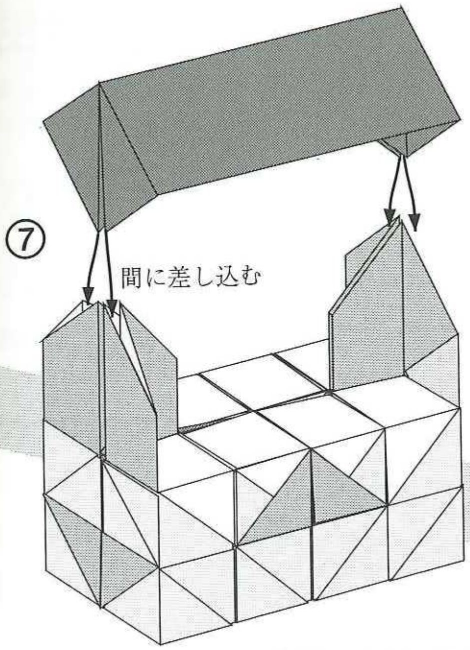
街の壁の屋根を支える柱です．折り方は縦ジョイントTに似ています．

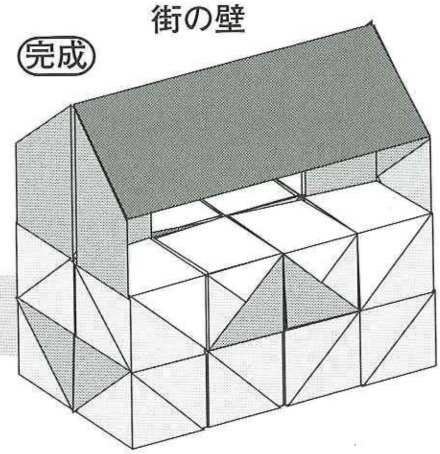


街の壁の組立

４０ページの**長い家１⑤**（下図の①）にふたをしてから**柱**を立てます．これに長い屋根をつけたものが**街の壁**です．



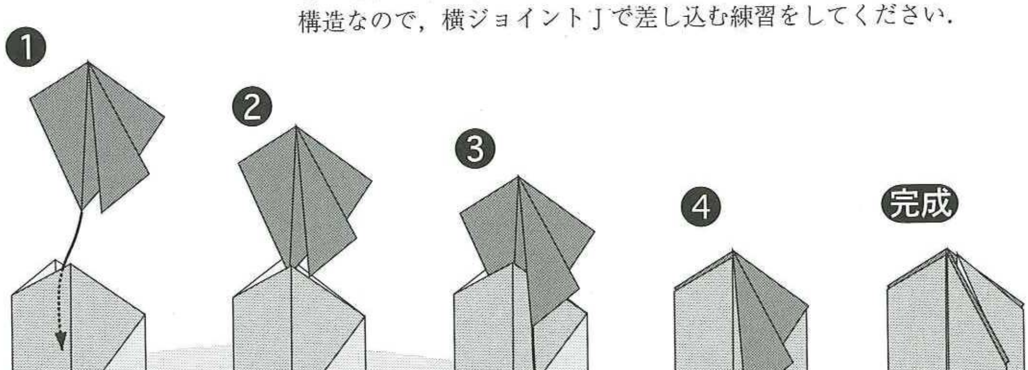




屋根のつけ方がわからない
人は下図を見てください

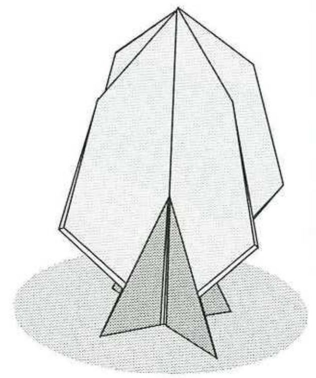
屋根の柱への取りつけ練習

柱は二層構造になっているので，層の間に屋根のカドを差し込むことができます．屋根のカドと横ジョイントＪのカドは同じ構造なので，横ジョイントＪで差し込む練習をしてください．



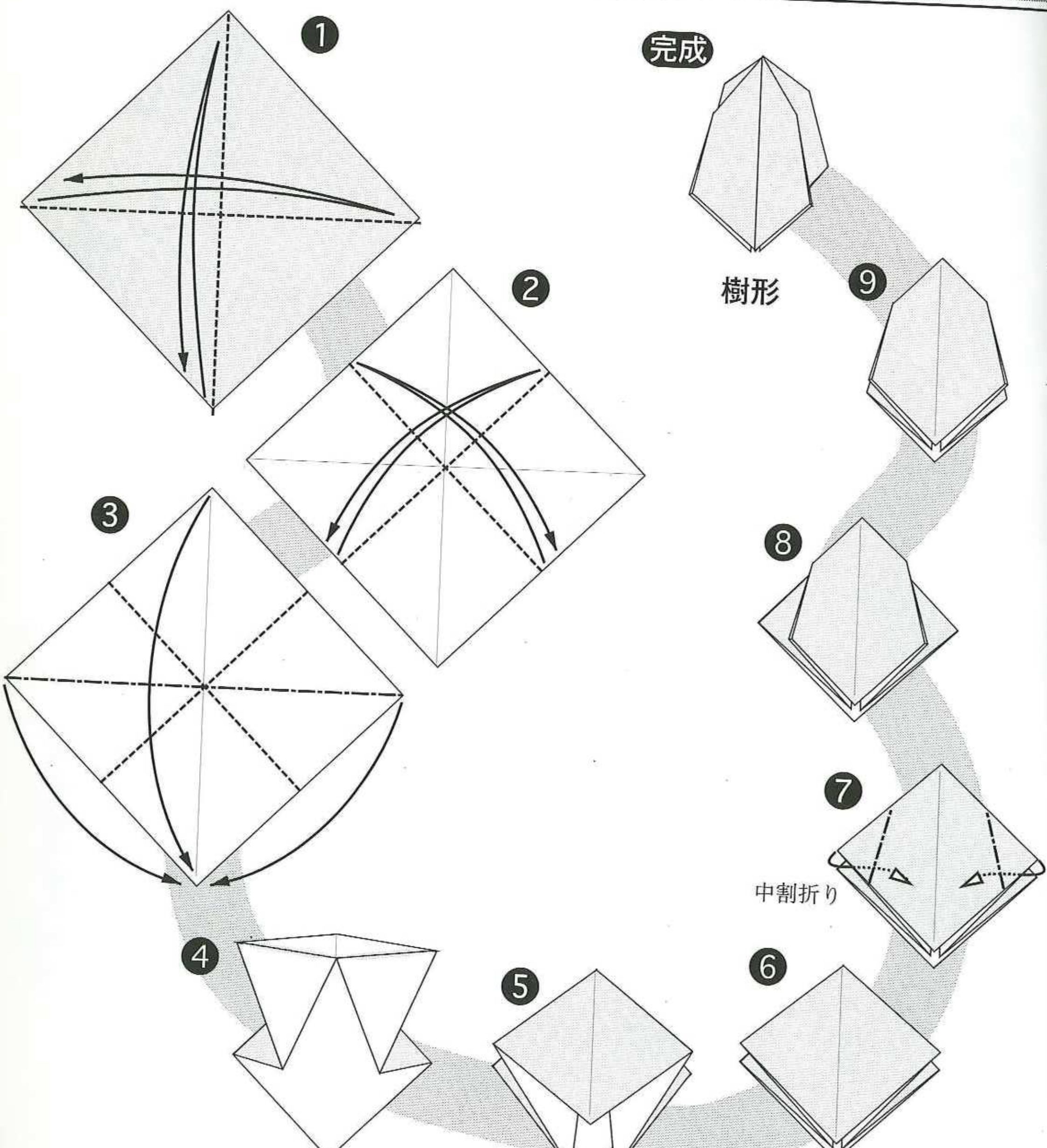
小さい木（津田さんの幹＋樹形）

津田良夫さんの幹（次のページ）で**樹形**をはさむだけの簡単な木です．津田さんの名著「創作折り紙をつくる」大月書店には写実的な木の折り方が紹介されています．



樹形（12cm角くらい）

木の形に合わせて**正方基本形**のカドを中割折りするだけです．

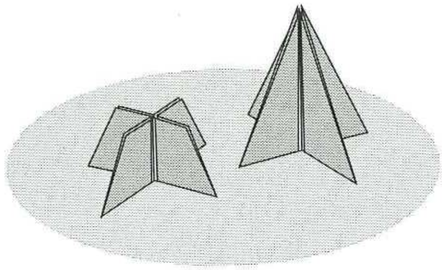


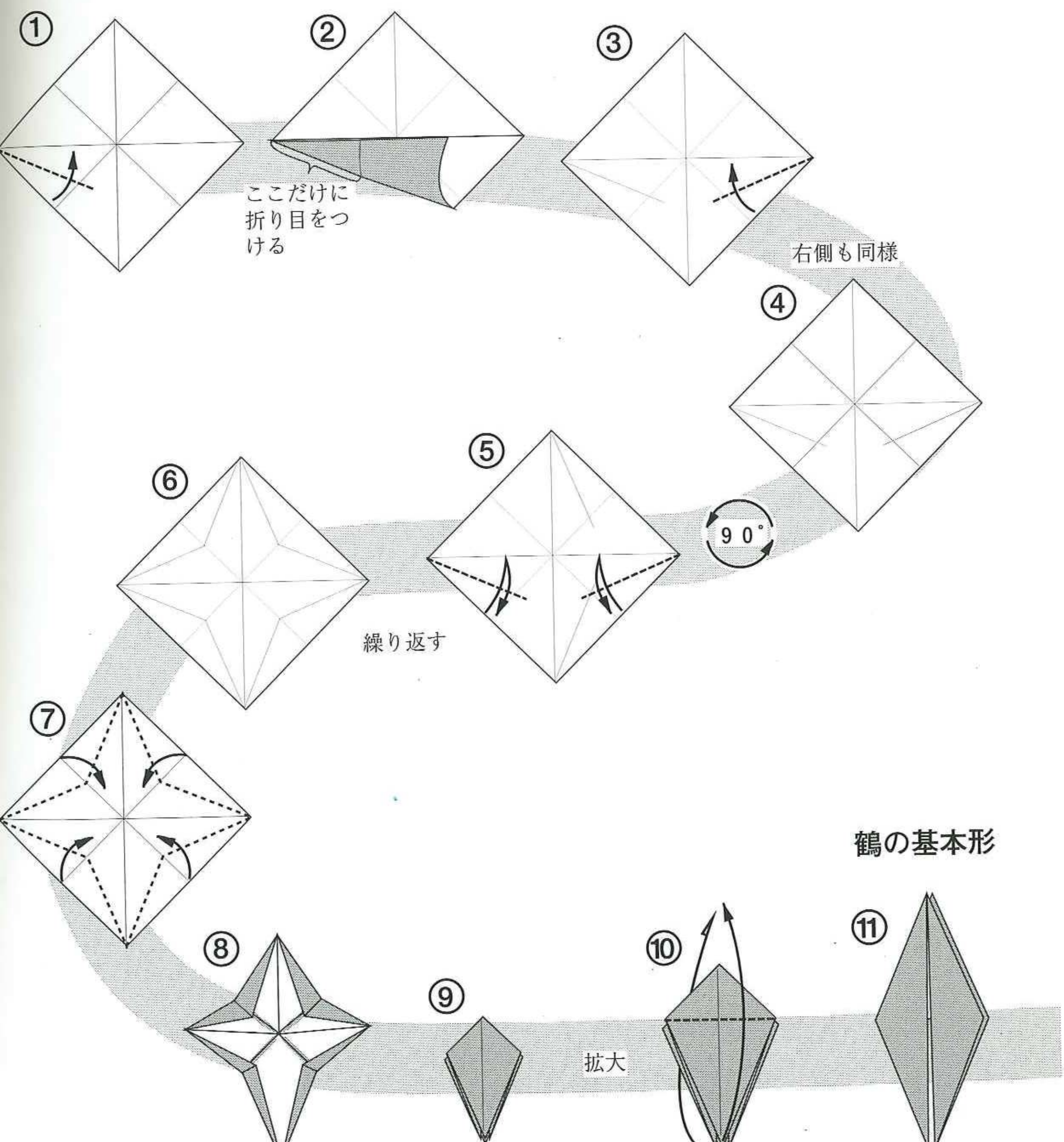
津田さんの幹 (9cm角くらい)

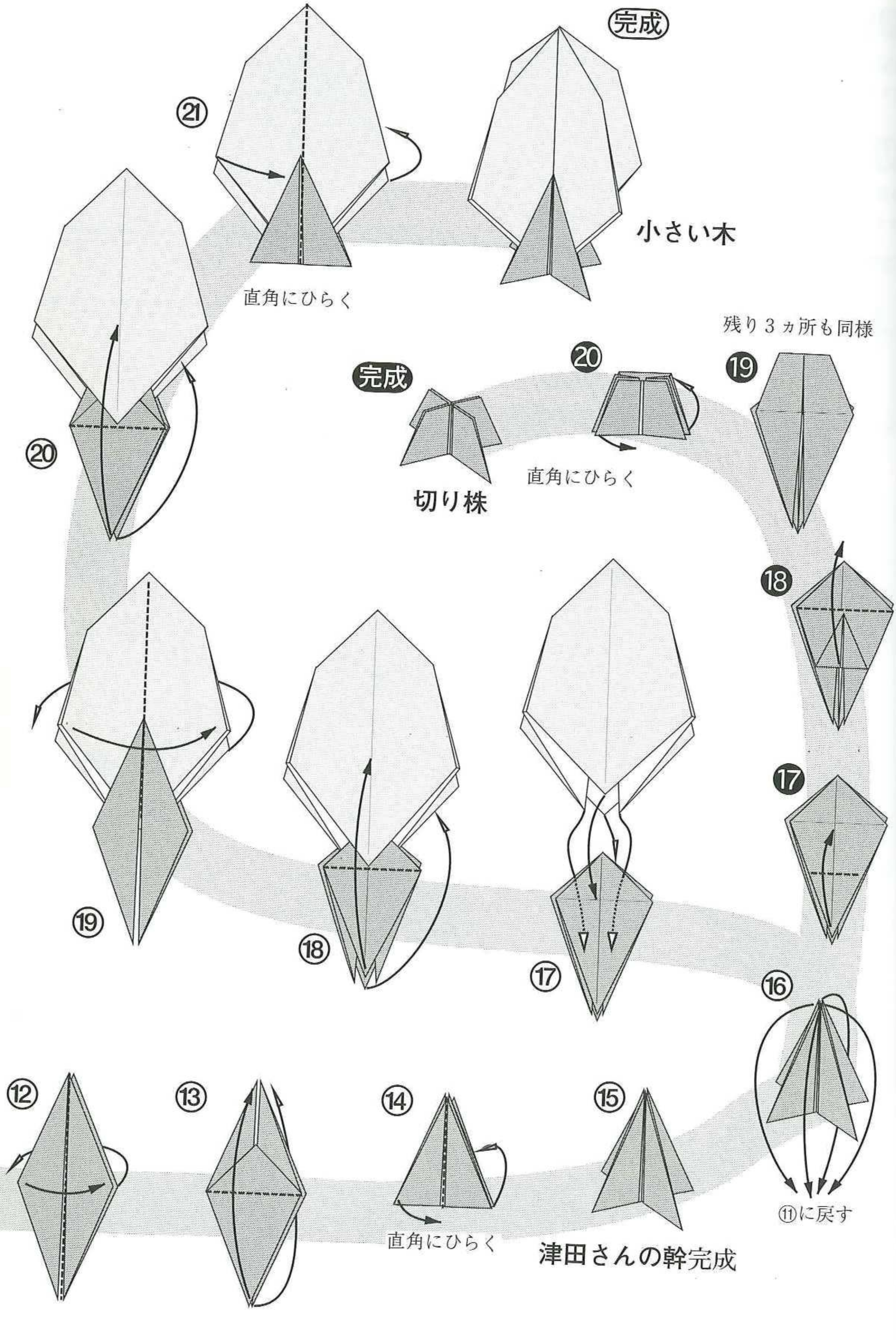
津田さんの幹は**鶴の基本形**に一折り加えただけですが,
なかなかの優れものです.

切り株 (9cm角くらい)

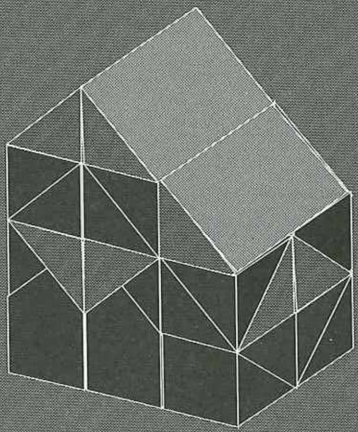
津田さんの幹の先端を半分に折ったものです．佐世保高
専卒業生の西田さんと相知君が２年生の時の発案です．






㉑
完成
直角にひらく
小さい木
⑳
残り３ヵ所も同様
⑳
⑲
完成
直角にひらく
切り株
⑱
⑲
⑱
⑰
⑰
⑯
⑪に戻す
⑫
⑬
⑭
⑮
直角にひらく
津田さんの幹完成

1.8

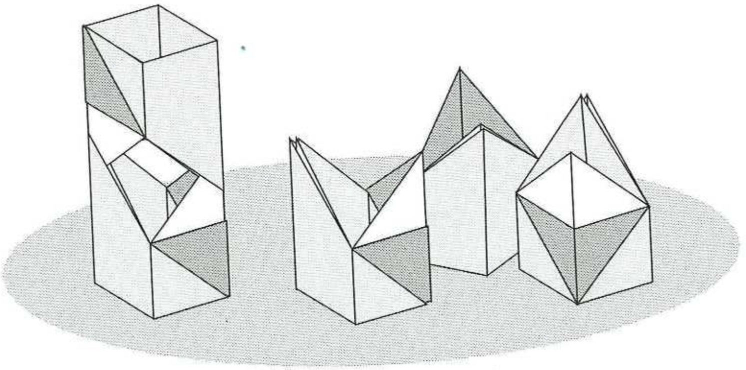


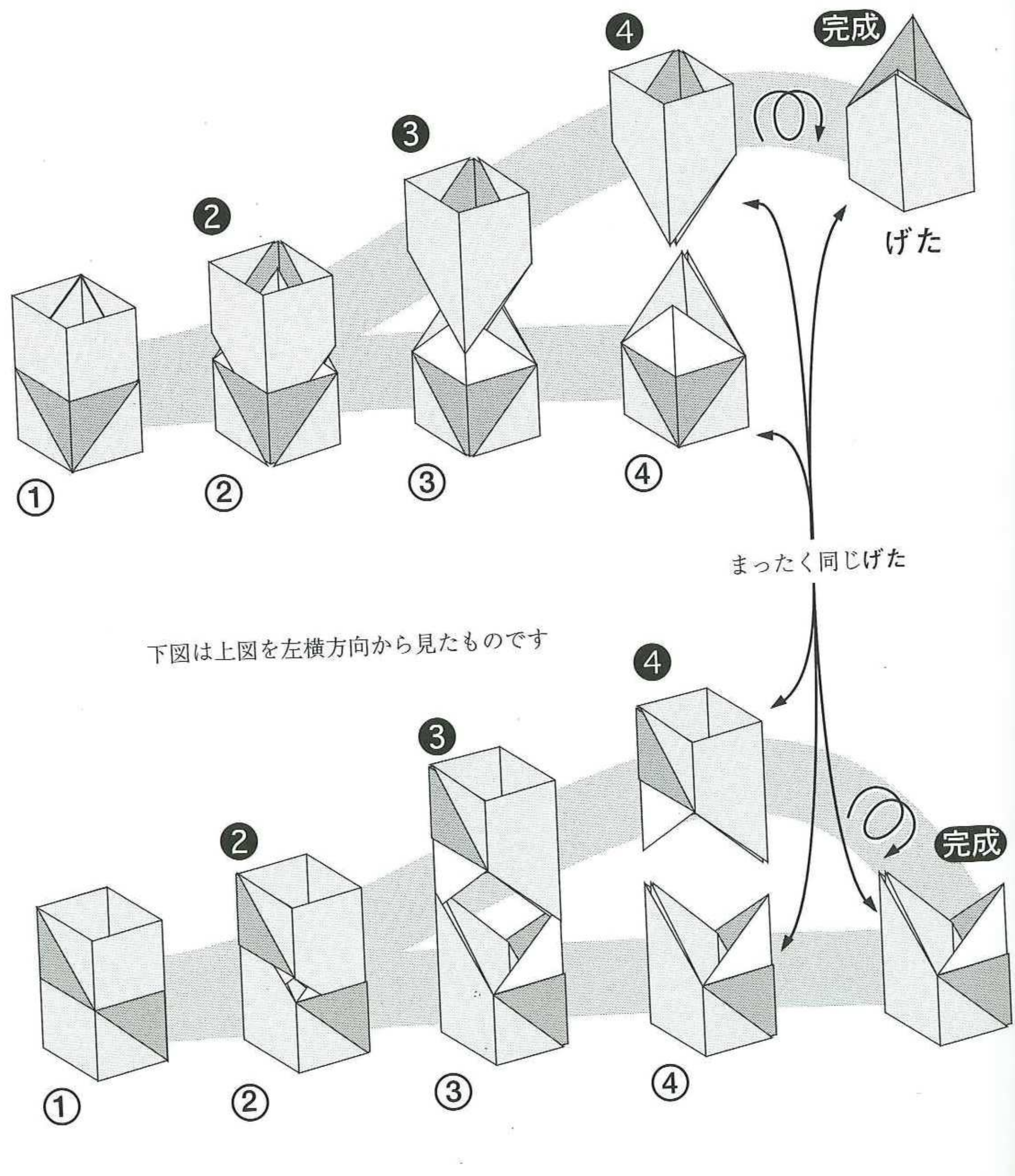
1.8 大きい家

げた
げたつき長い家
大きい家

げた (P2×2)

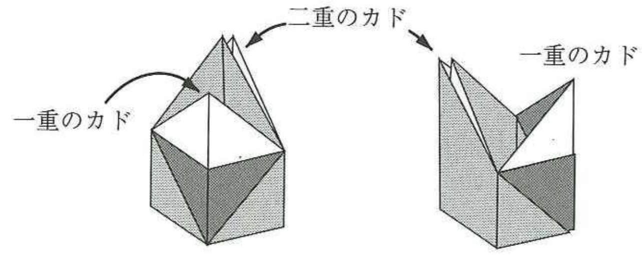
げたは基本ブロックAを2つに分解したものです．家の下にげたを取りつけると，家を高くすることができます．
このげたは，佐世保高専折り紙同好会第4代部長佐々木大君が考え出したものです．

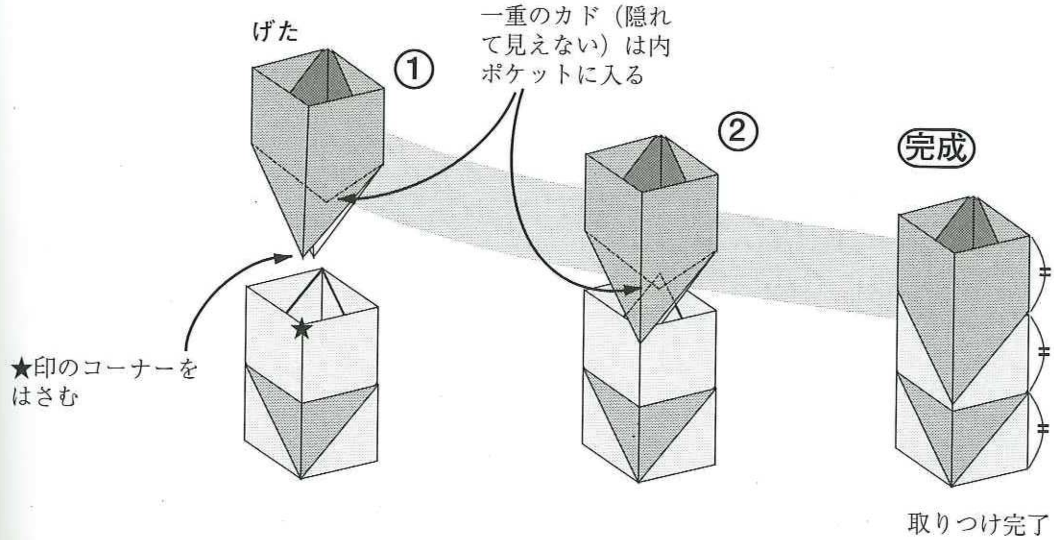


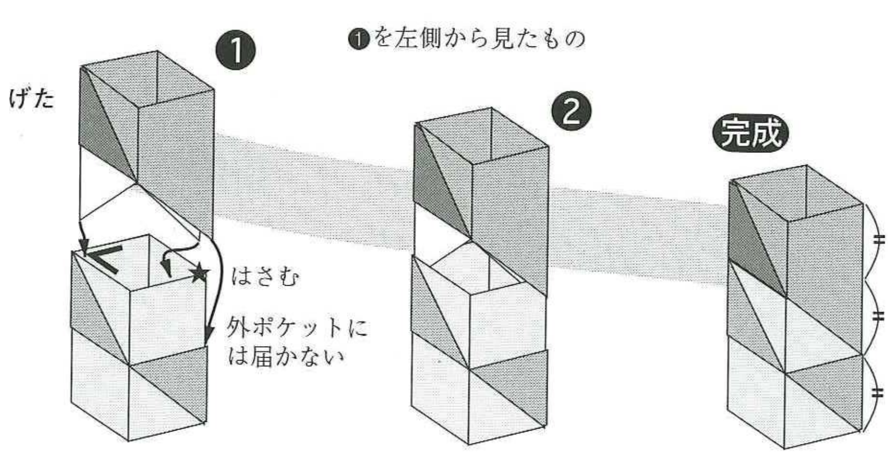


げたの使い方

げたにはとがったカドが２つあります．用紙の裏（白い面）が出た一重のカドと二重のカドです．一重のカドをブロックの**内ポケット**に差し込み，二重のカドでブロックのコーナーをはさみます．





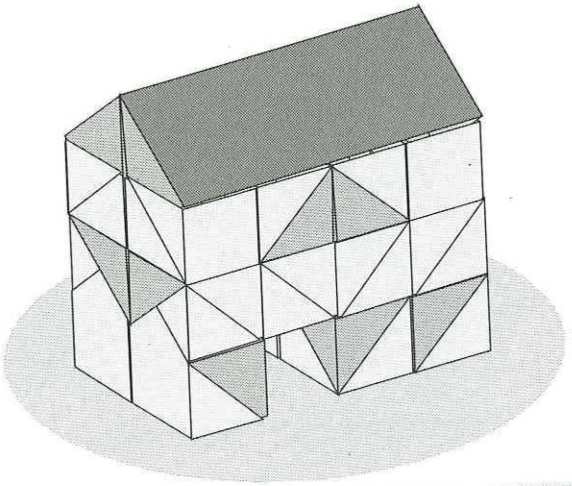


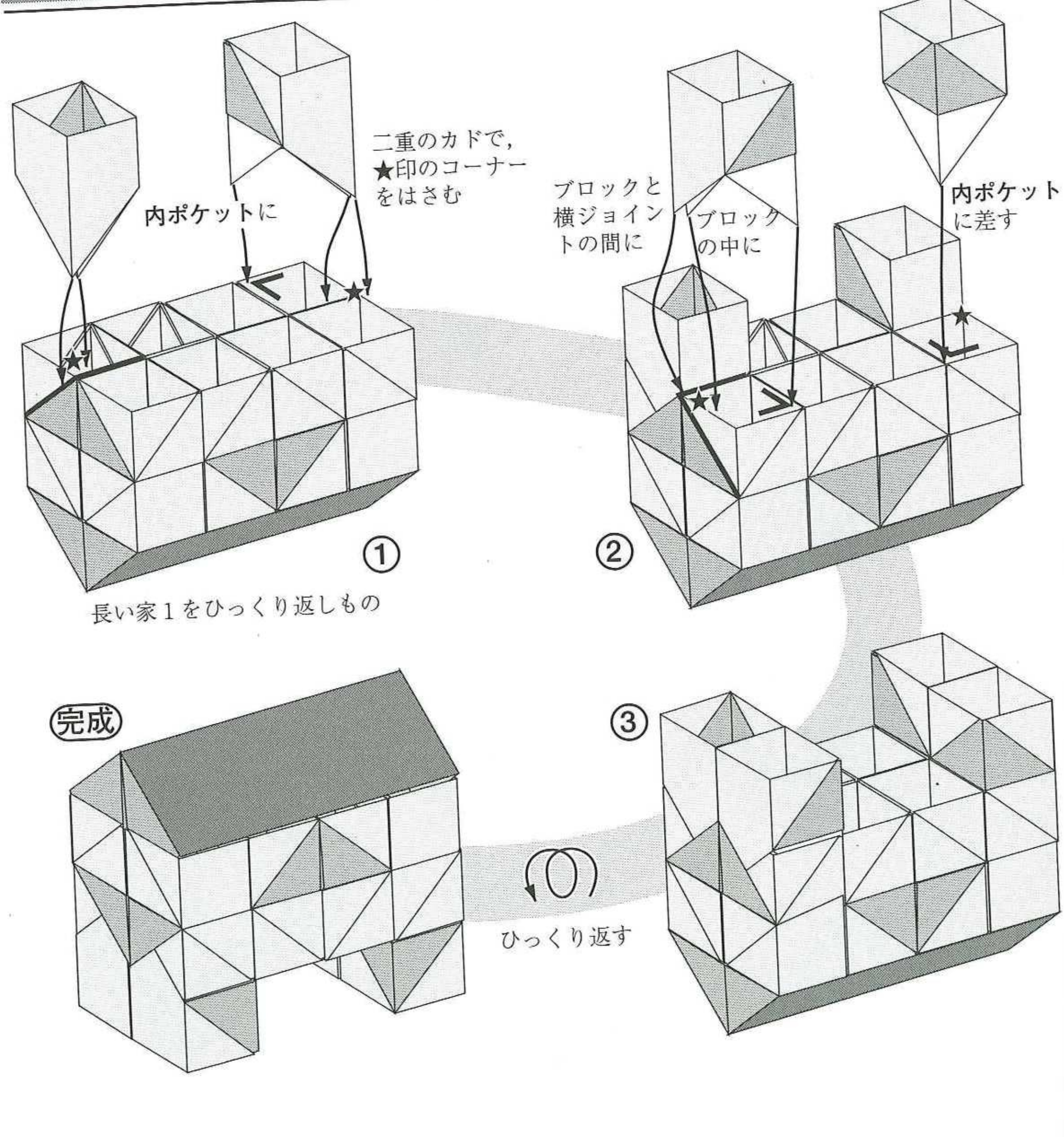
げたつき長い家

（長い家１＋げた×4）

長い家にげたをはかせて高くしましょう．下の説明では上下がわかるように屋根をつけたままげたを取りつけていますが，実際にするときは屋根をはずしておいてください．

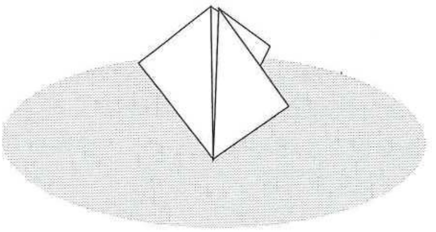
げた４個は一例に過ぎません．何個でも取りつけられます．右図は６個つけたもので，開いている部分で入り口を表現しました．



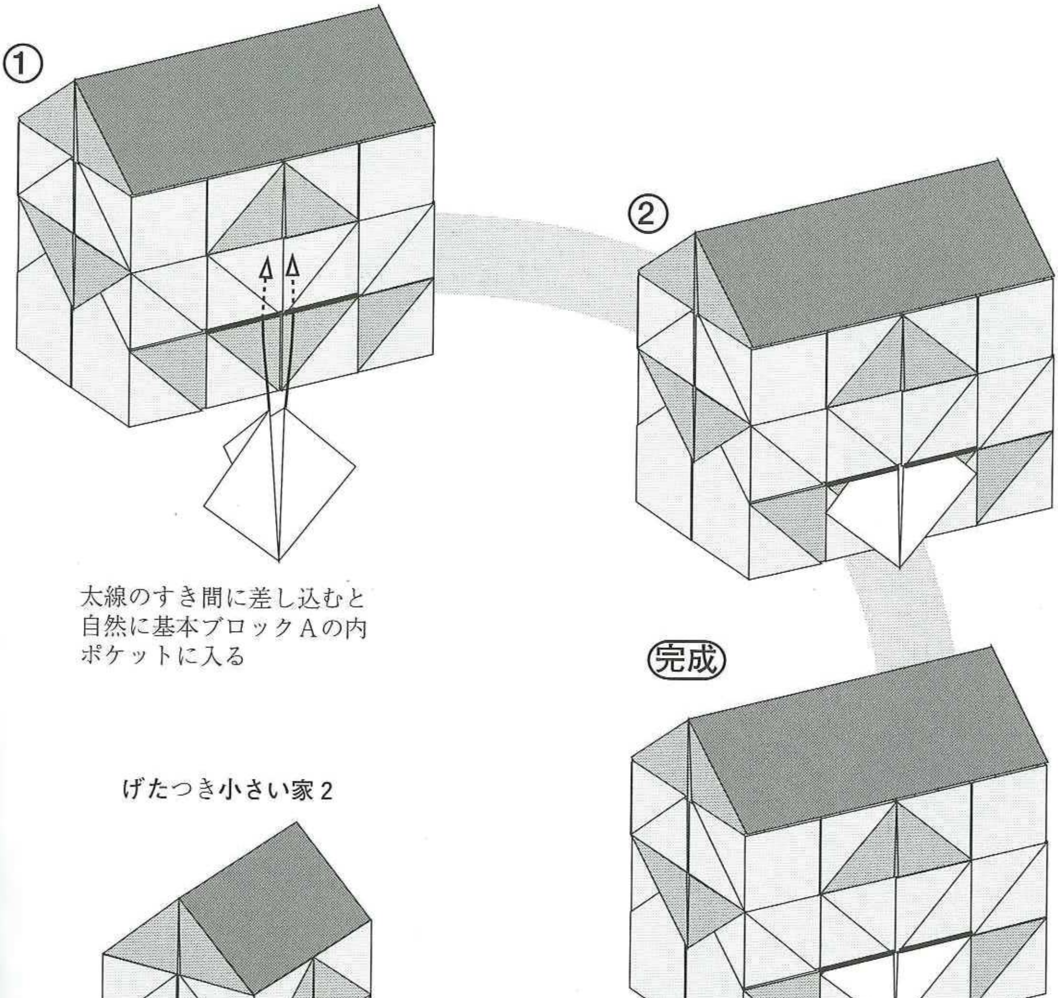


げたの留め具 (P2)

横ジョイントJはげたを固定するのに役立ちます．下図①〜③は**長い家1**につけたげたを**げたの留め具**で固定するところです．白い三角形がげたの留め具です．



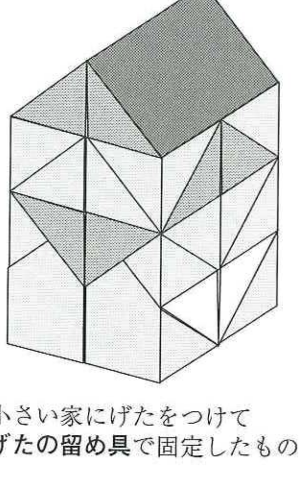
長い家1にげたを8個つけたもの



太線のすき間に差し込むと自然に基本ブロックAの内ポケットに入る

反対側も同じように留める

げたつき小さい家2

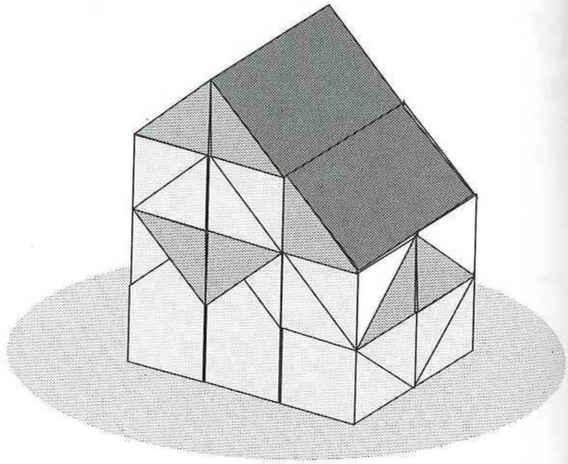


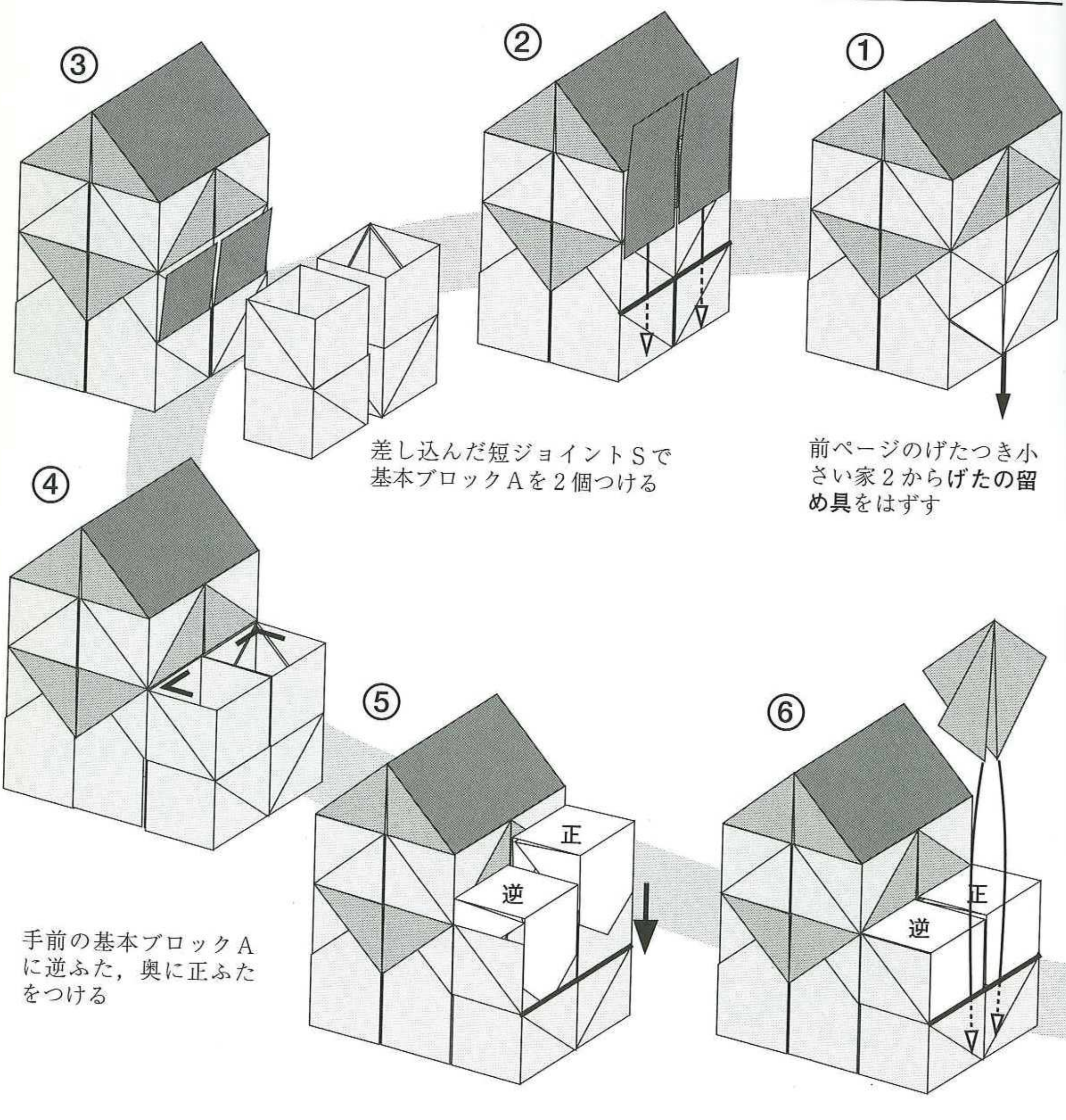
小さい家にげたをつけて**げたの留め具**で固定したもの

大きい家

（げたつき小さい家２＋A×2＋S×2＋正ふた＋逆ふた＋つぎたし屋根）

小さい家２を増築しましょう．**つぎたし屋根**は自信作です．
要領がわかったら元になる家の大きさやつぎたし屋根のサイズを変えていろんな形の大きな家を作ってください．



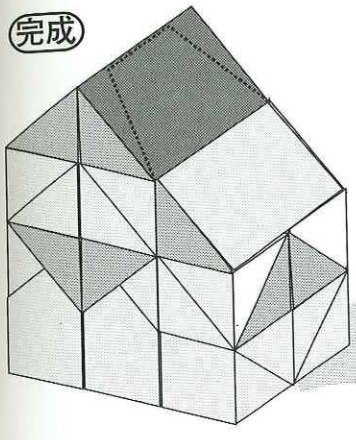


① 前ページのげたつき小さい家２から**げたの留め具**をはずす

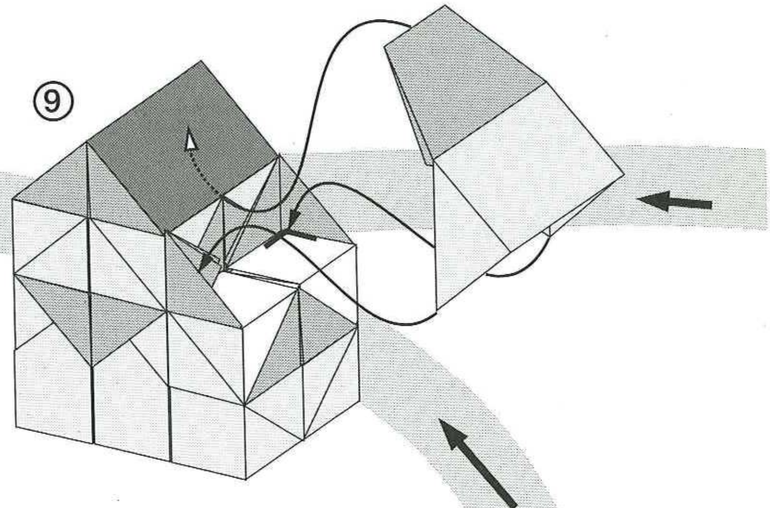
② 差し込んだ短ジョイントＳで基本ブロックＡを２個つける

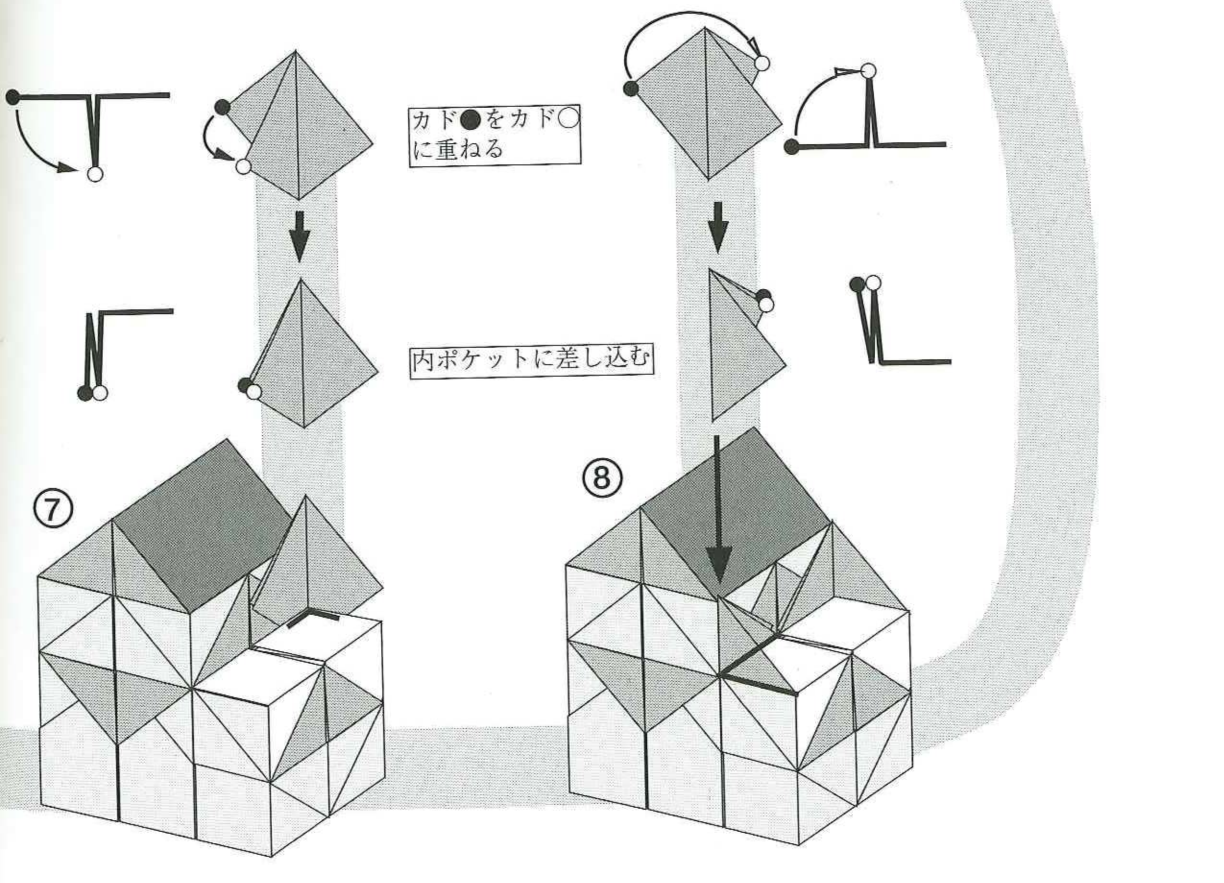
⑤ 手前の基本ブロックＡに逆ふた，奥に正ふたをつける

つぎたし屋根のカドを内ポケット（⑨のL印）に差し込みながら，斜線部分を屋根の下に入れます．
つぎたし屋根の折り方は次のページです．



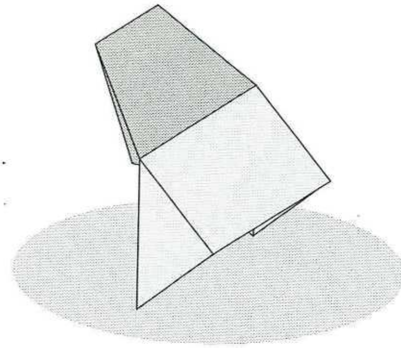
大きい家

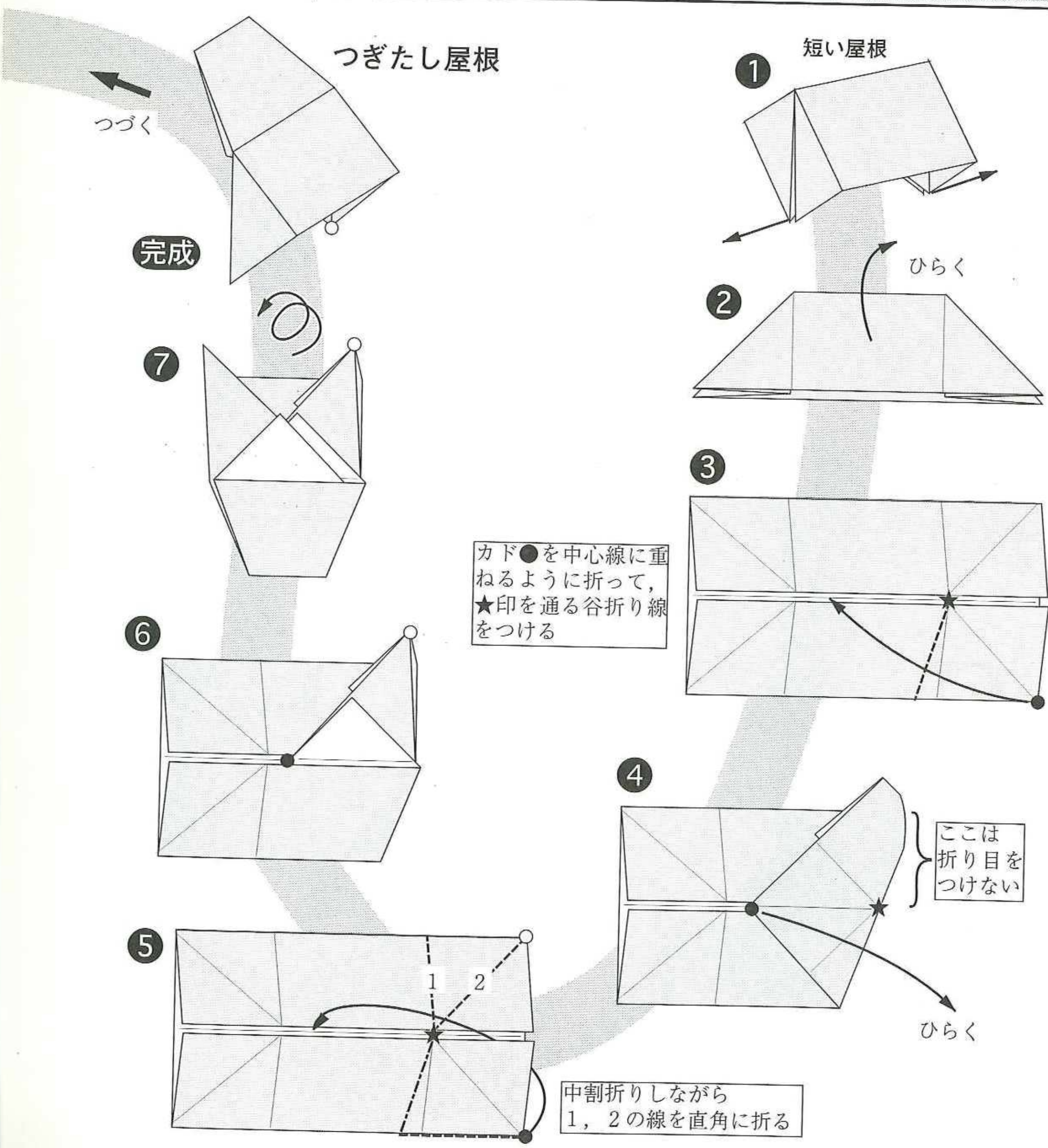




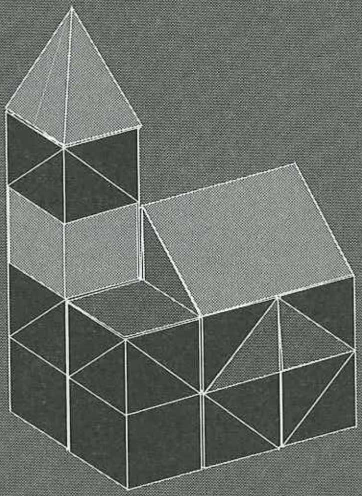
つぎたし屋根 (15cm×13cm)

短い屋根の片側をひらいてまとめなおしたものです.





1.9

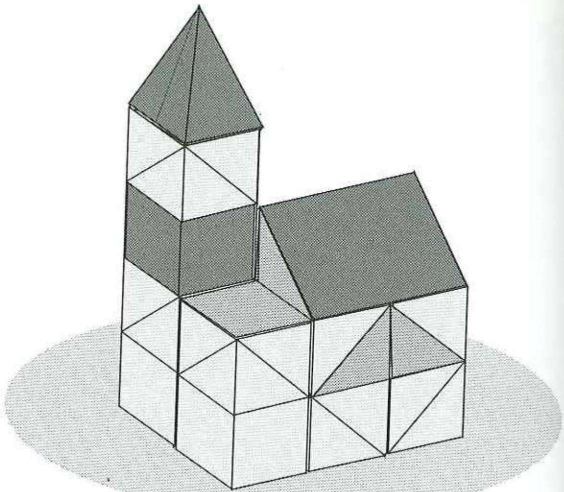


1.9 小さい教会

小さい教会

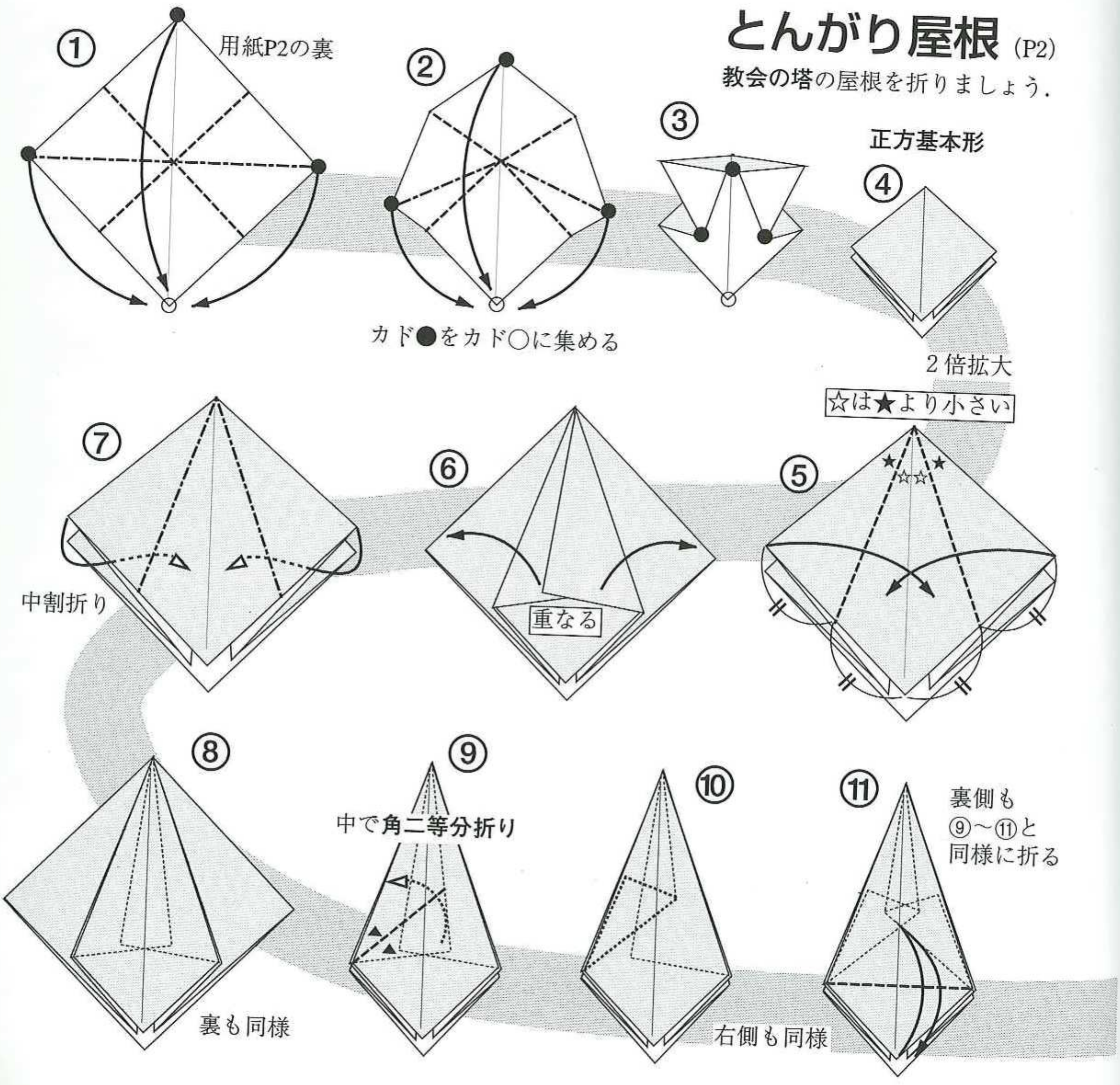
小さい教会（小さい家２＋教会の塔＋Ａ＋正ふた＋Ｓ×4）

縦組した基本ブロックＡに**とんがり屋根**をつけた**教会の塔**を，小さい家２に取りつけると**小さい教会**ができます．



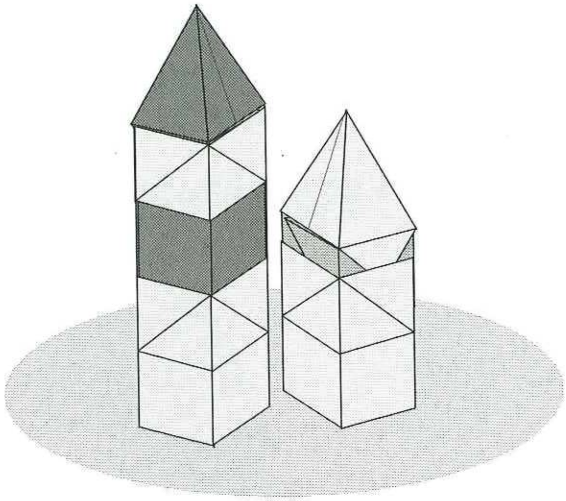
とんがり屋根（P2）

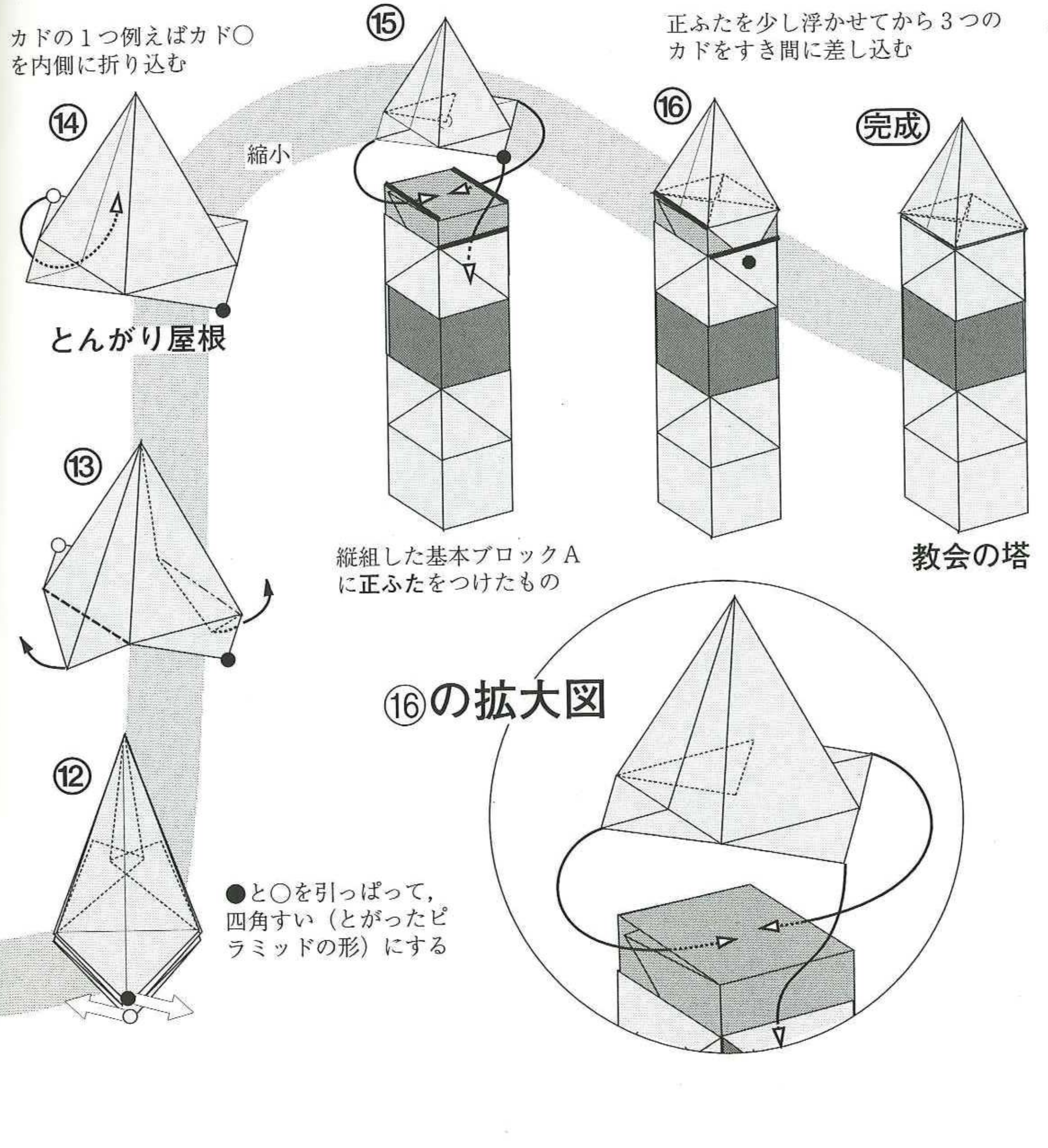
教会の塔の屋根を折りましょう．



教会の塔（A×2＋T×2＋つめ＋正ふた＋とんがり屋根）

教会の塔は，縦組した基本ブロックＡにふたと**つめ**をつけ，ふたやブロックのすき間に**とんがり屋根**の３つのカドを差し込んで固定したものです．縦組するブロックを増やせば塔はいくらでも高くできます．



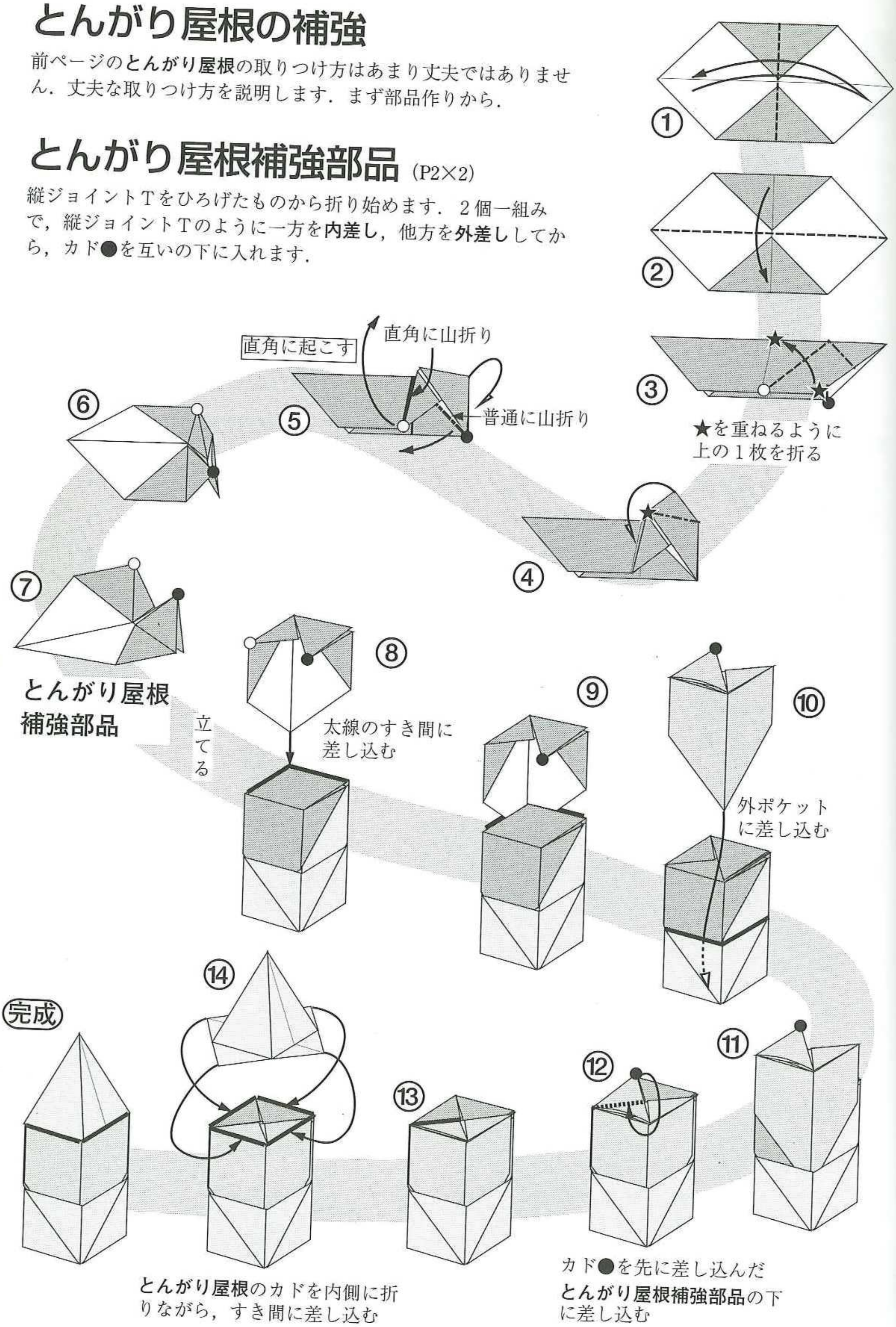


とんがり屋根の補強

前ページの**とんがり屋根**の取りつけ方はあまり丈夫ではありません．丈夫な取りつけ方を説明します．まず部品作りから．

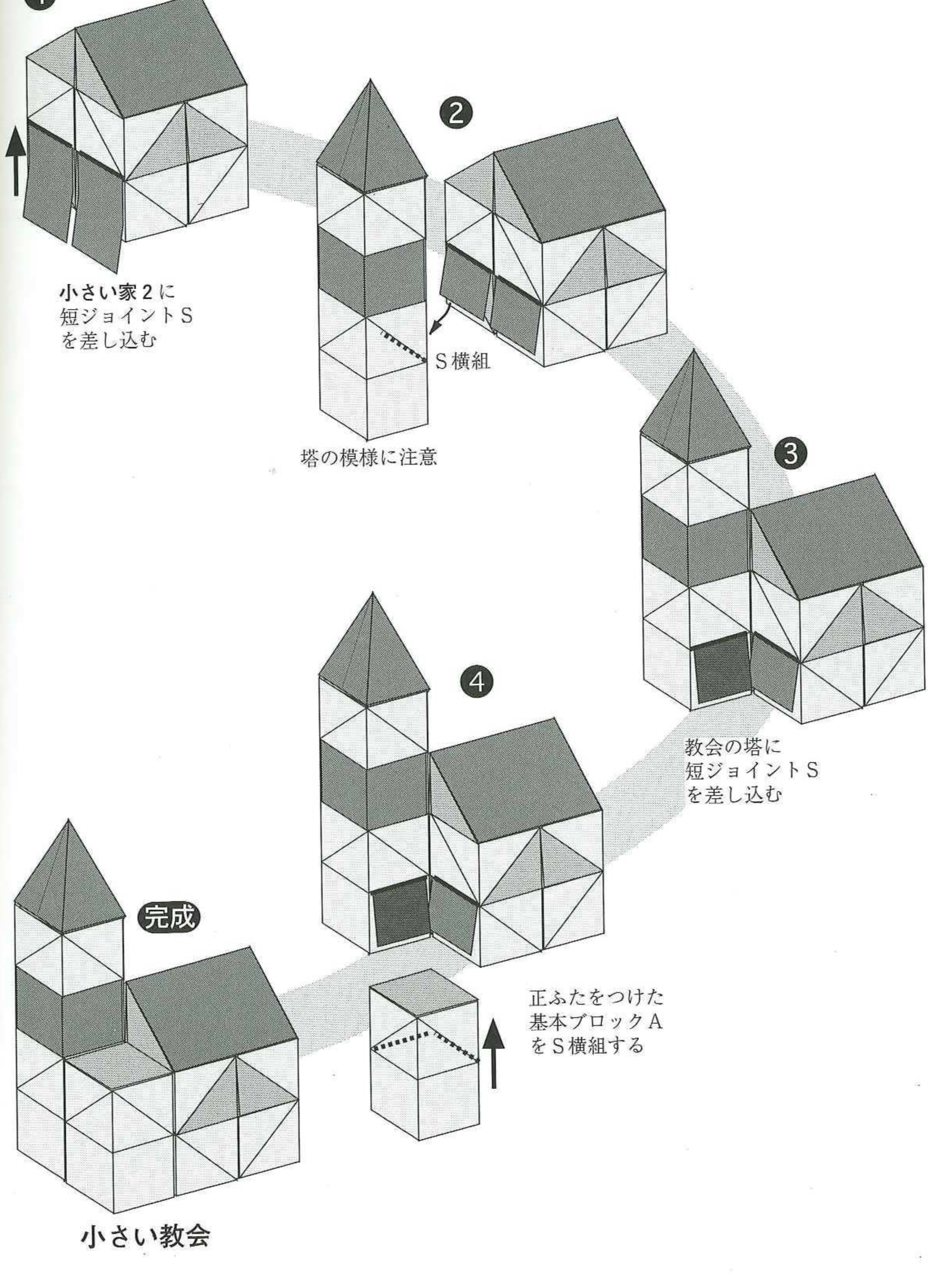
とんがり屋根補強部品 (P2×2)

縦ジョイントTをひろげたものから折り始めます．2個一組みで，縦ジョイントTのように一方を**内差し**，他方を**外差し**してから，カド●を互いの下に入れます．



小さい教会の組立

小さい家２，教会の塔，正ふたつき基本ブロックＡを短ジョイントＳでつなぐと**小さい教会**の完成です．

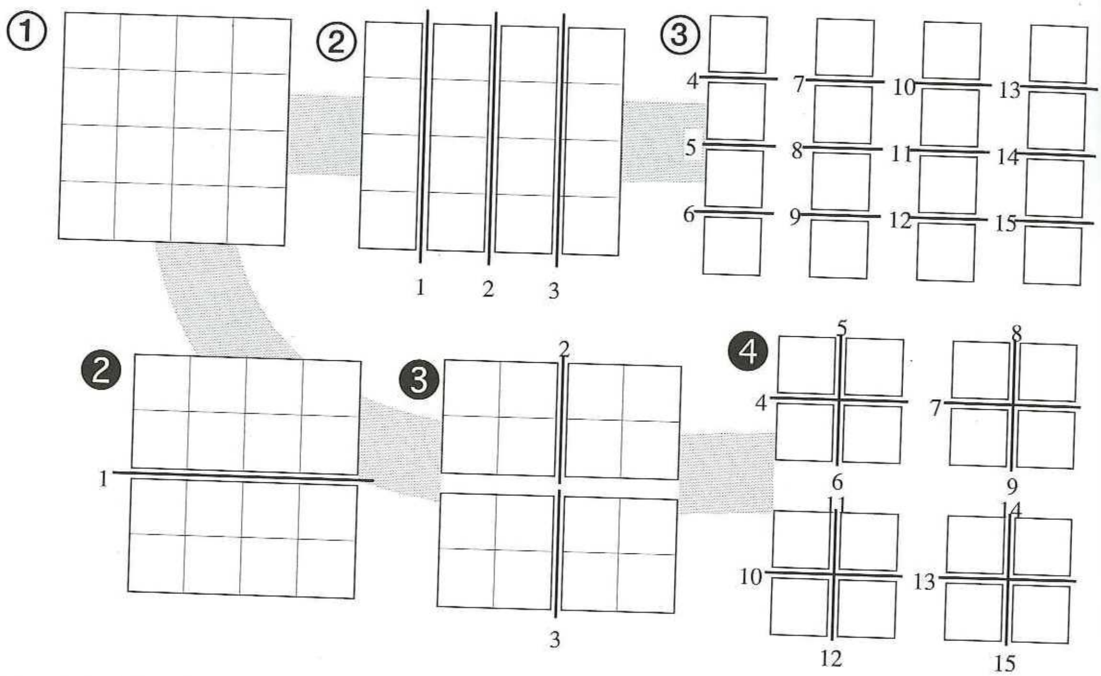


小さい教会

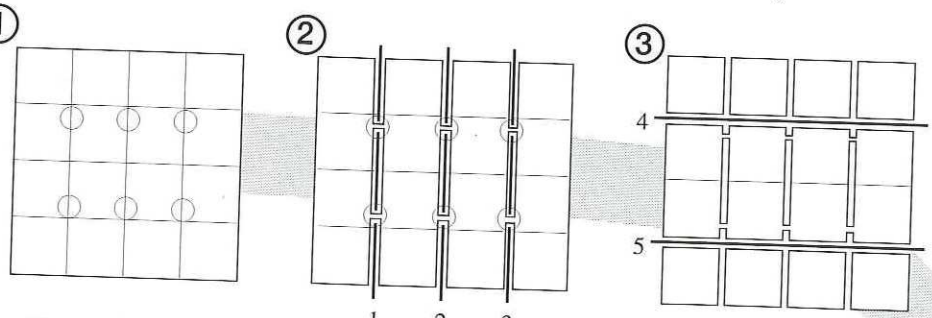
大量生産４（切り方のコツ）

折り目をつけた**大量生産１～３**の用の用紙を効率良く１６等分する方法があります．

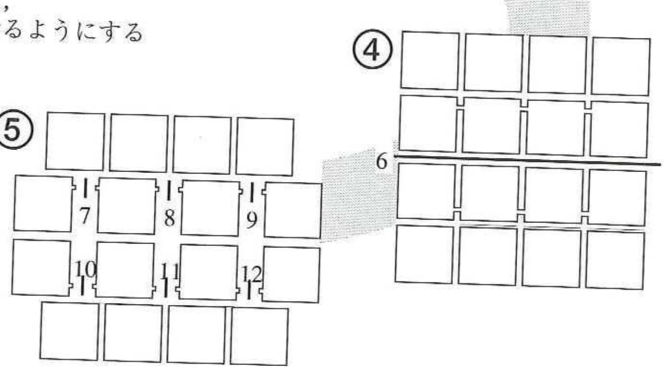
２２，５１，５２ページ**大量生産１～３**より



どちらも１５回刃を入れます．効率の良い切り方ではありません．紙を重ねて切れば回数は少なくなりますが，意外に簡単に紙がずれるので切り損ないやすくなります．そこで，

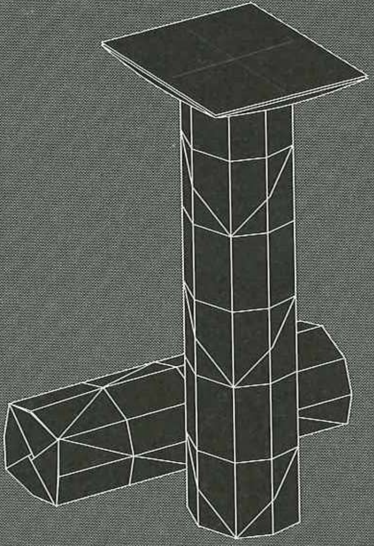


縦に切り込み１～３を入れるとき，
丸内でカッターの刃を軽く浮かせるようにする



７～１２の切り口がはみ出ているのは誇張して描いたせいです．実際はちゃんと正方形になります．
また切断１～３の切り残しを最小限に抑えると，紙を引っぱるだけで７～１２は切れます．

1.10



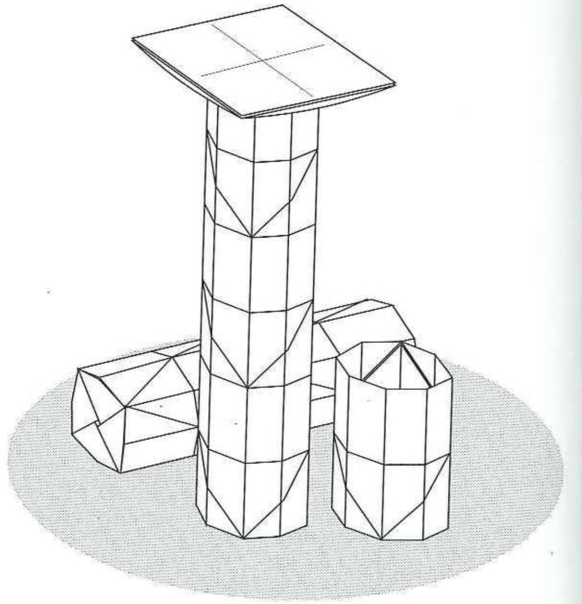
1.10 ギリシャ神殿

ギリシャ神殿の柱
八角ブロック
ギリシャ神殿のゆか

ギリシャ神殿の柱（A×3＋U×4＋ふた＋石板＋石板固定部品×2)

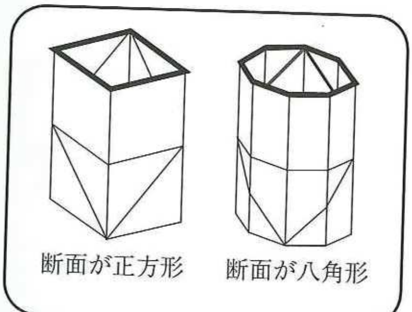
古代ギリシャ神殿の柱は，円柱状に切り出した石材を積み重ねて作られています．しかし積み重ねただけでは横にずれて壊れるので，石材断面の中央に小さな穴をあけてそこに丈夫な木の棒をはめ込んでずれないように工夫されています．

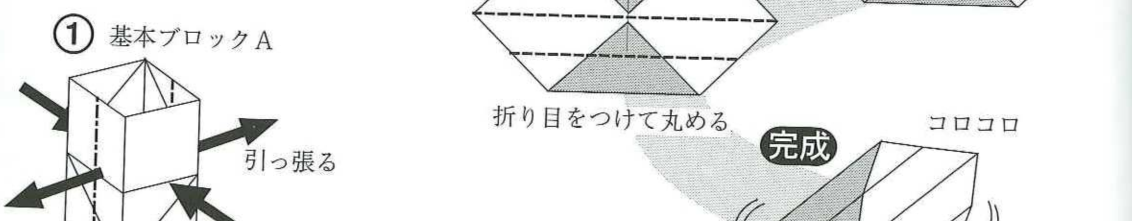
右図の柱は，基本ブロックAを八角柱にしたものを3個縦組し，上に**石板**（正方形の板）を取りつけたものです．倒れている柱の断面中央の小さな穴は上記のずれ防止の穴です．



八角ブロック（A）

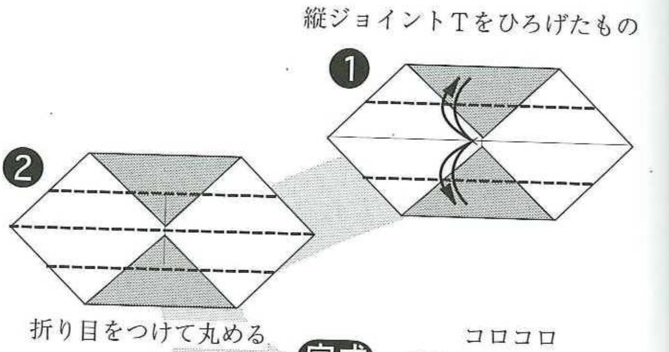
基本ブロックAに縦方向の折り目を4本加えて八角柱にしたものです．





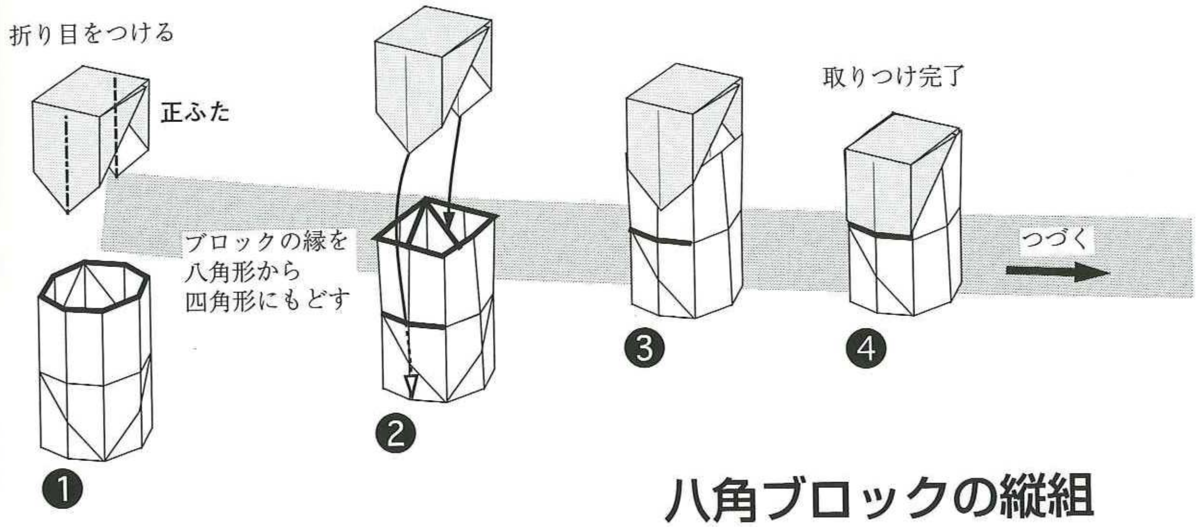
縦ジョイントU（P2）

縦ジョイントTに折り目を加えるだけです．



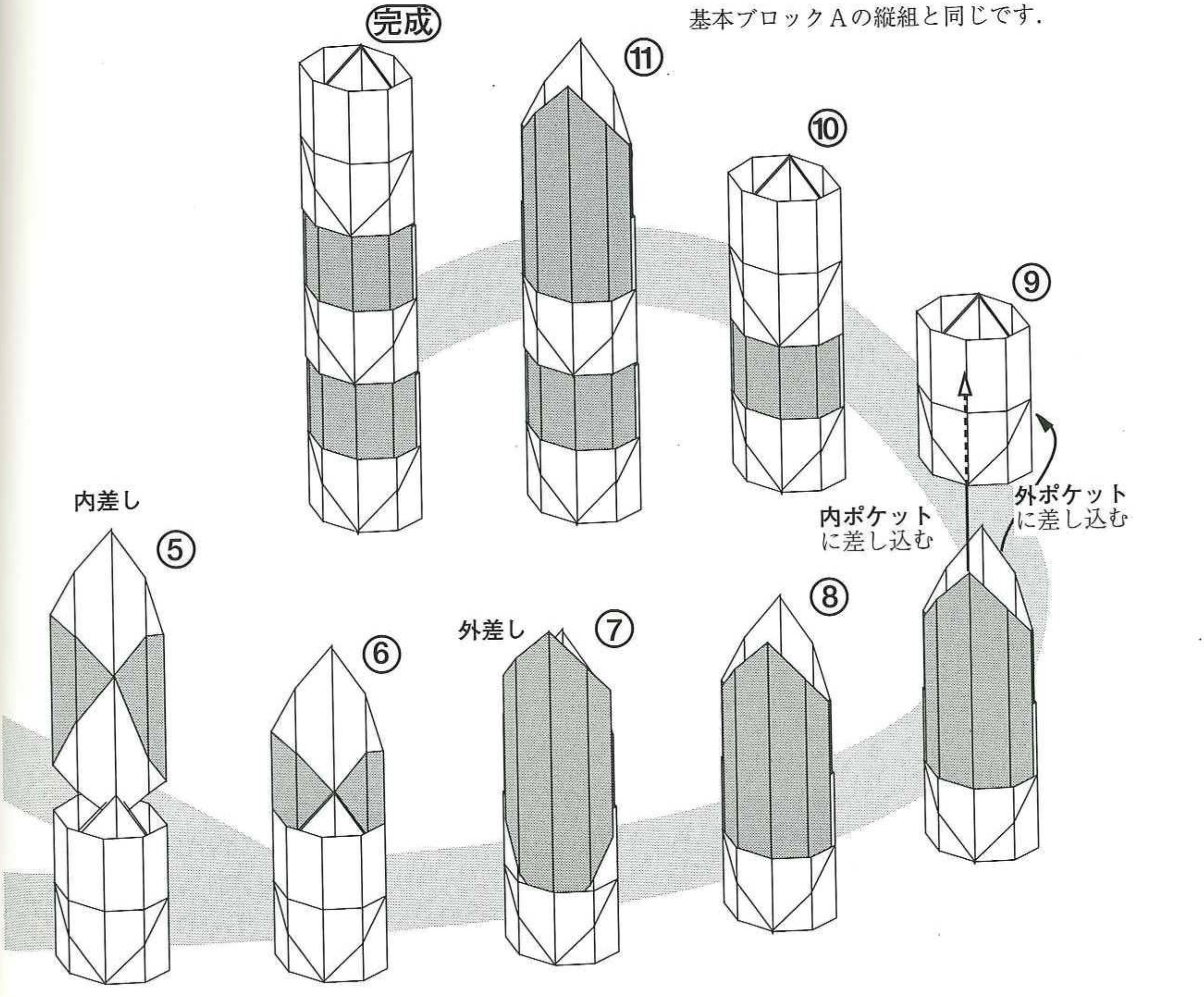
八角ブロックのふたのつけ方

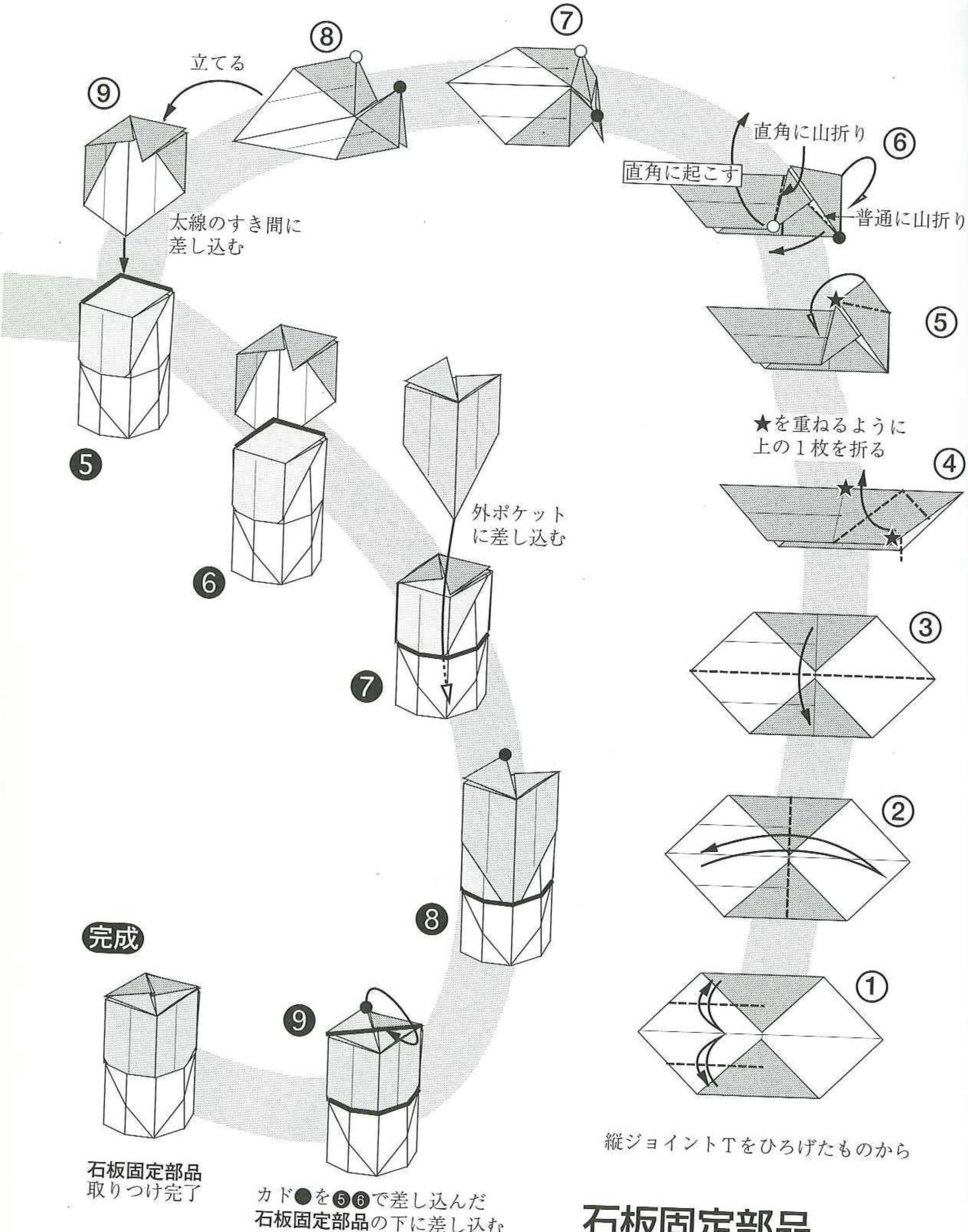
八角柱を四角柱に戻してふたをつけます.



八角ブロックの縦組

基本ブロックAの縦組と同じです.



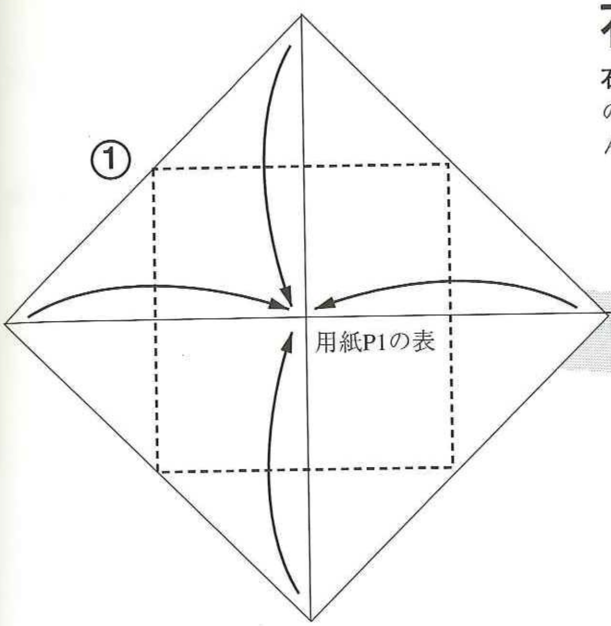


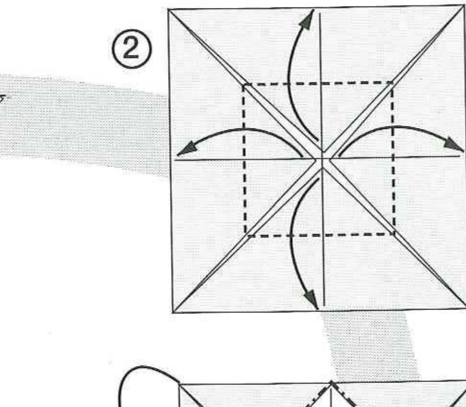
石板固定部品

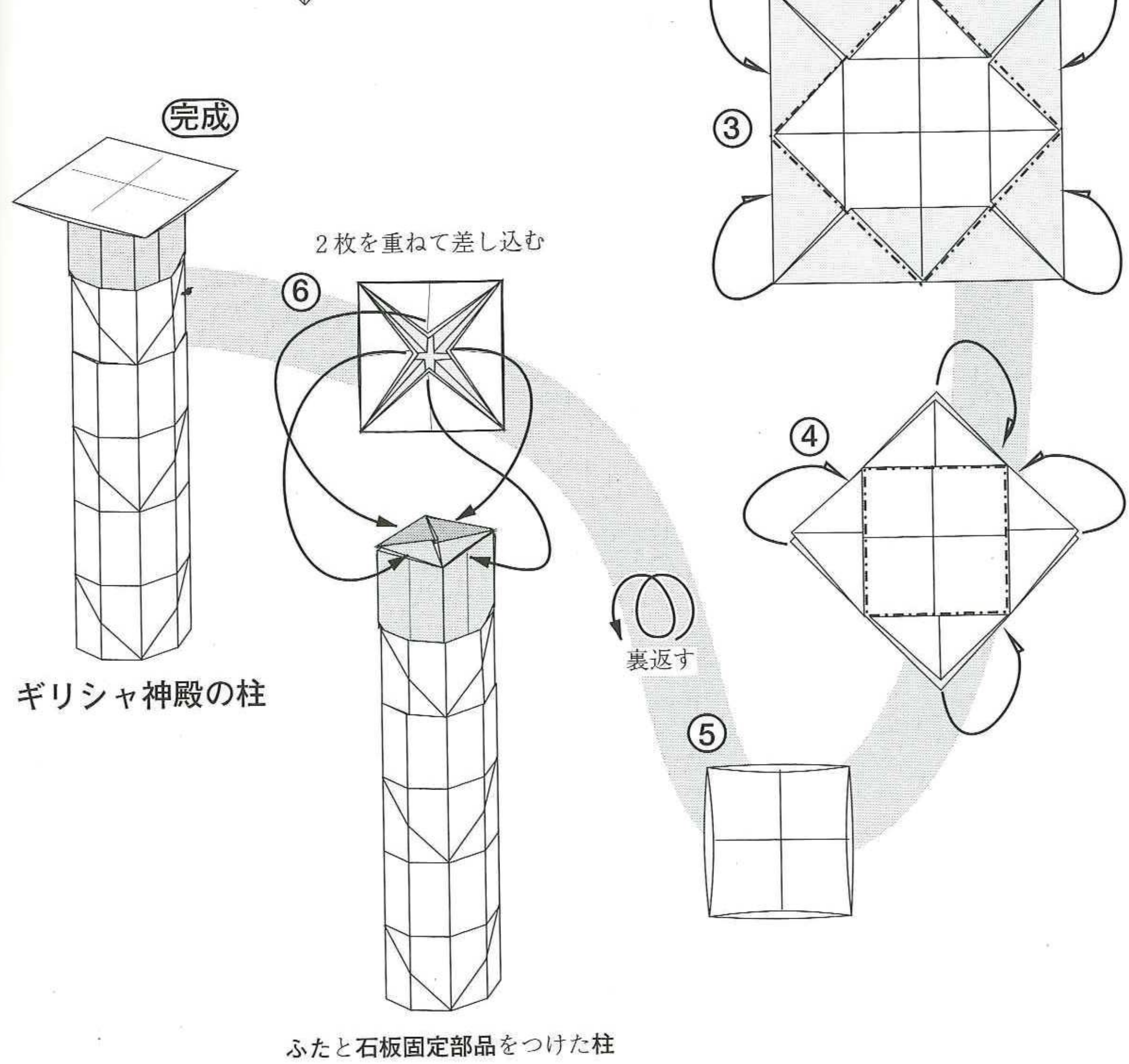
とんがり屋根取りつけ部品とほとんど同じものです．違いは①の折り目の有無だけです．

石板（P1）

石板は柱の上に乗っている薄い板です．石板裏の三角形のカドを，⑥のようにすき間に差し込んで固定します．





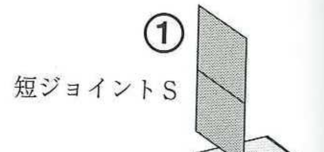


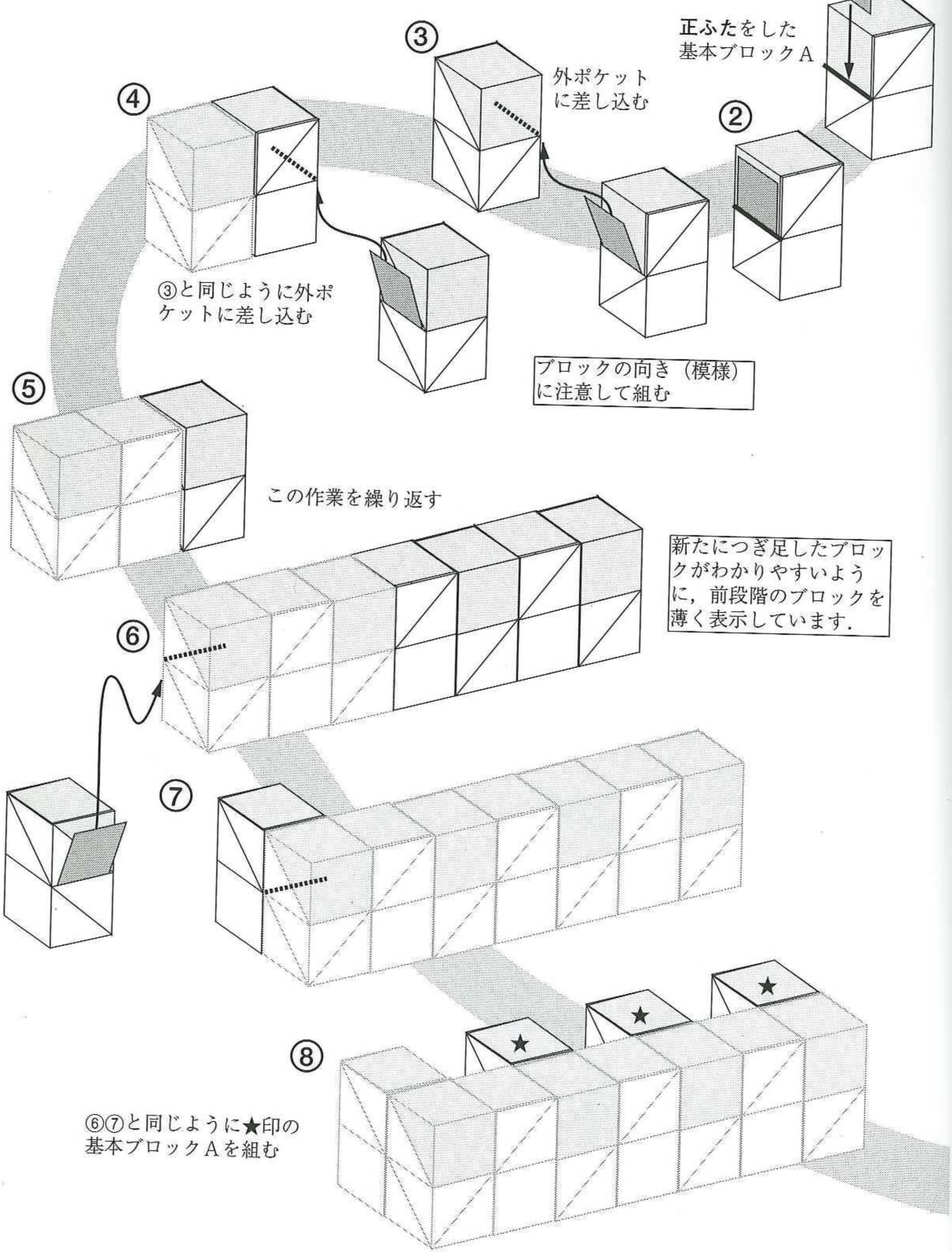
ギリシャ神殿の柱

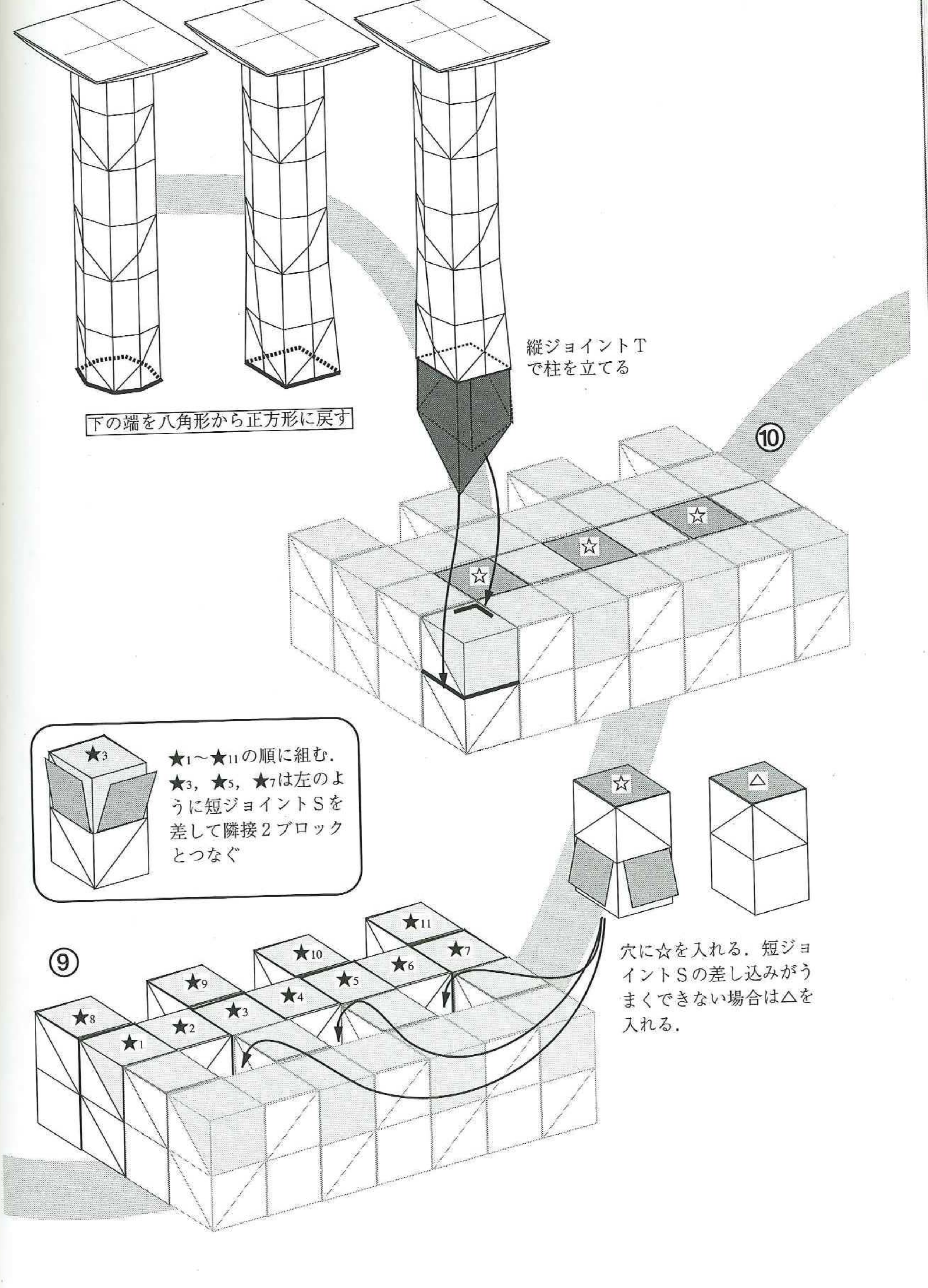
ふたと石板固定部品をつけた柱

ギリシャ神殿のゆか

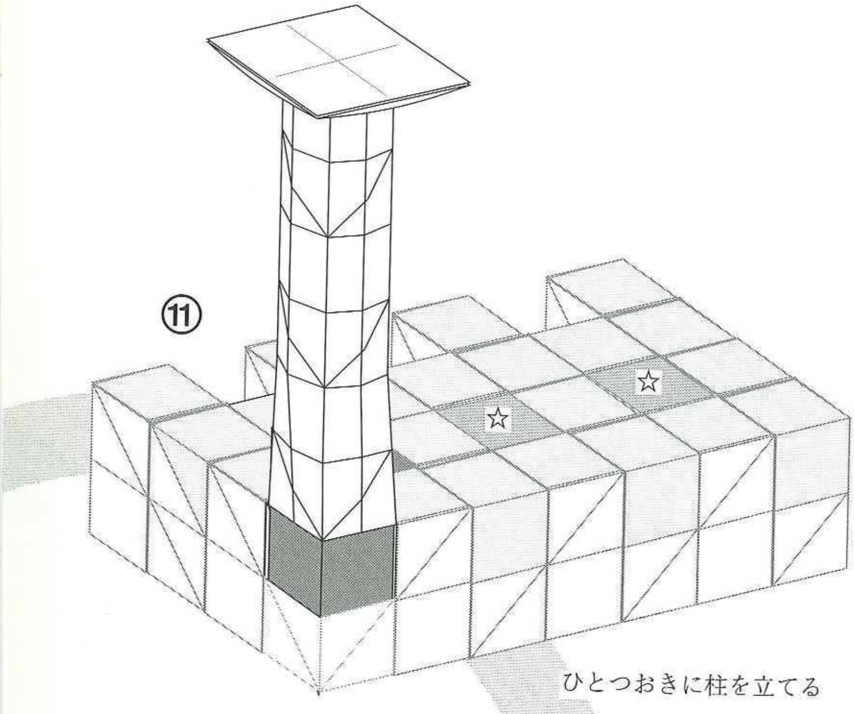
ふたをした基本ブロックＡを**S横組**してゆかにする方法を説明します．**J横組**する方法もあります．**ギリシャ神殿の柱**はこのゆかに縦ジョイントＴで立てます．





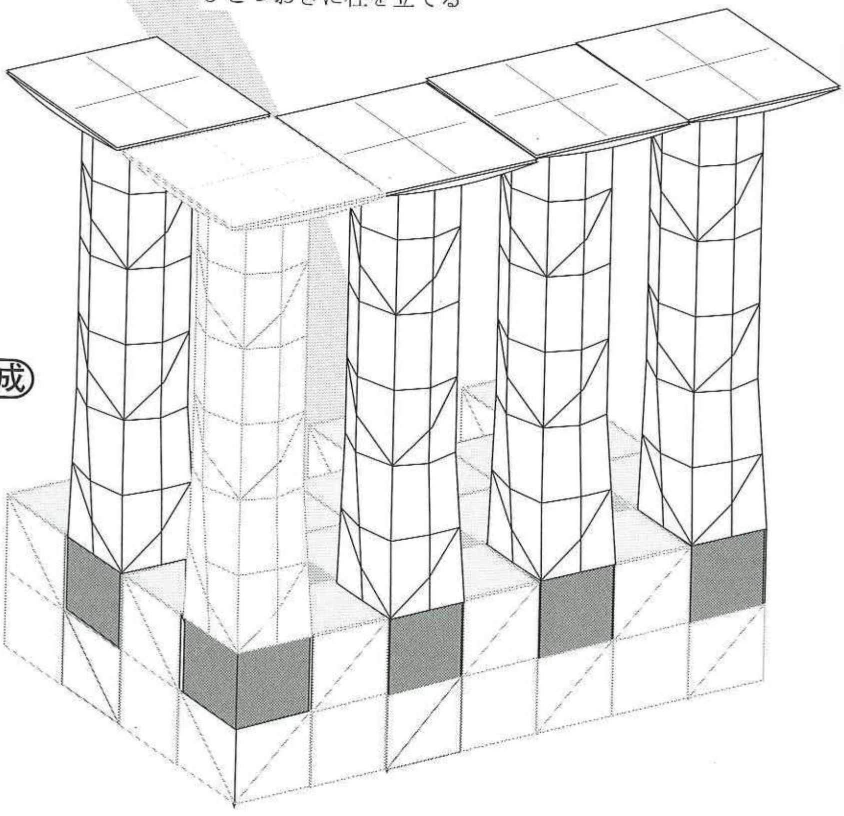

下の端を八角形から正方形に戻す
縦ジョイントT
で柱を立てる
⑩
☆
★3
★1～★11の順に組む.
★3, ★5, ★7は左のように短ジョイントSを差して隣接2ブロックとつなぐ
△
穴に☆を入れる. 短ジョイントSの差し込みがうまくできない場合は△を入れる.
⑨
★11
★10
★7
★9
★6
★5
★4
★8
★3
★2
★1

⑪



ひとつおきに柱を立てる

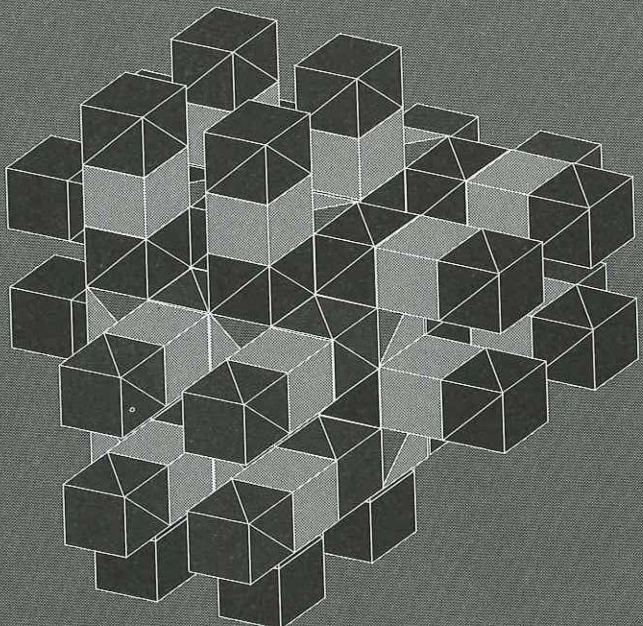
完成



ブロックを四角く敷き詰めたゆかに柱を等間隔に立てるとギリシャ神殿になります．柱の間隔や高さは好みに合わせて変えてください．

2.1

第2章　幾何造形



2.1 ねじり組み

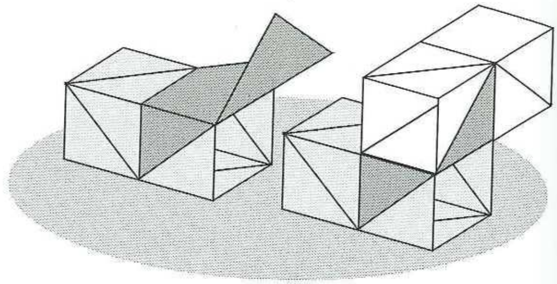
ねじり組み
ねじりジョイント
正ねじり分子と逆ねじり分子
正逆ねじり分子混合組み

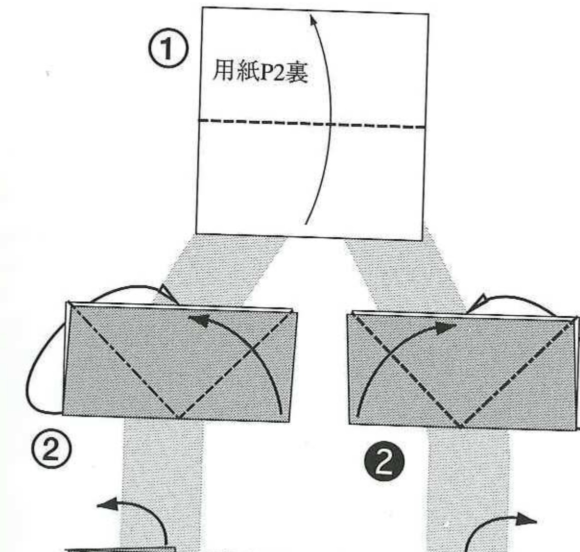
ねじり組み

ねじれの位置にくるように基本ブロックAを組んだものです.

ねじりジョイント (P2)

ねじり組み用のジョイントで，**正ねじりジョイントN**と**逆ねじりジョイントR**の２種類あります.



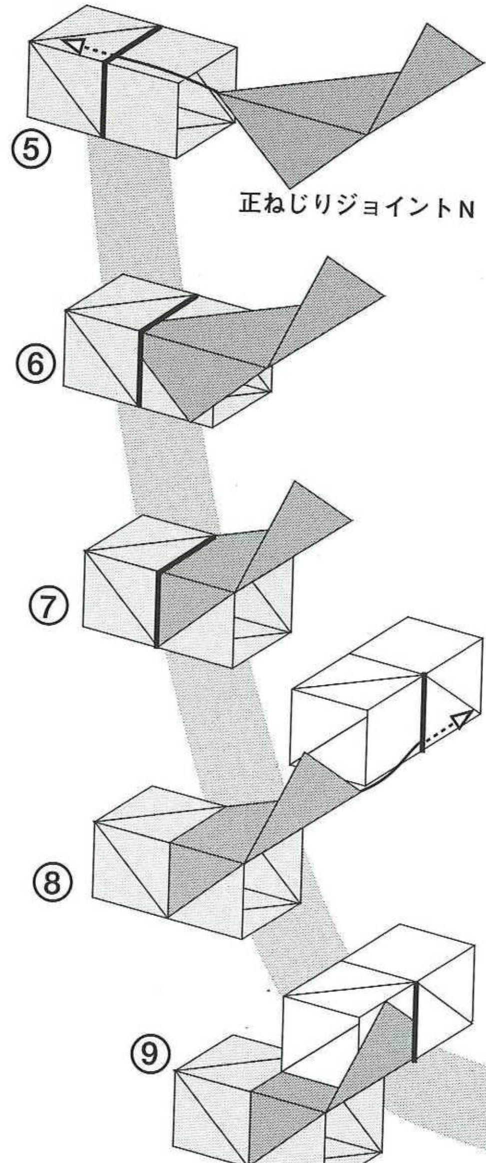


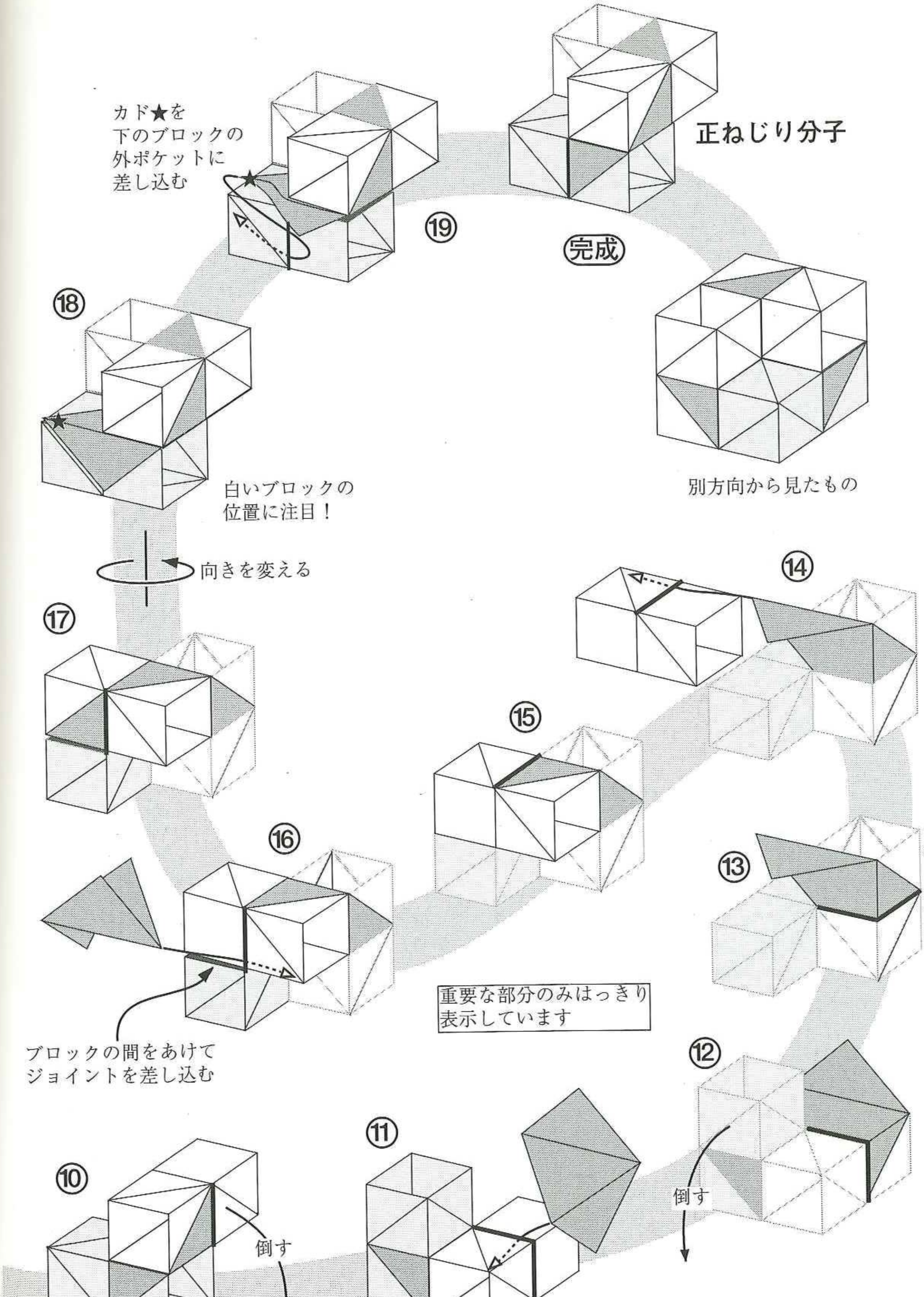
正ねじりジョイントN

逆ねじりジョイントR

ねじり組み方

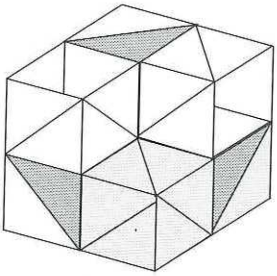
ジョイントのカドを**外ポケット**に差し込むだけです.



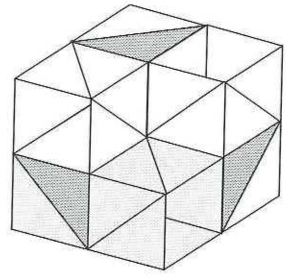

正ねじり分子
完成
別方向から見たもの
⑲
カド★を
下のブロックの
外ポケットに
差し込む
⑱
白いブロックの
位置に注目！
向きを変える
⑰
⑯
ブロックの間をあけて
ジョイントを差し込む
⑮
⑭
⑬
重要な部分のみはっきり
表示しています
⑫
倒す
⑪
⑩
倒す

正ねじり分子と逆ねじり分子

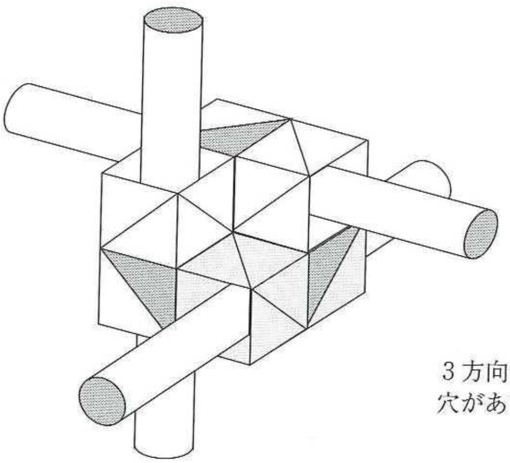
逆ねじりジョイントNの代わりに**逆ねじりジョイントR**を使うと，**正ねじり分子**を鏡に映した**逆ねじり分子**ができます．

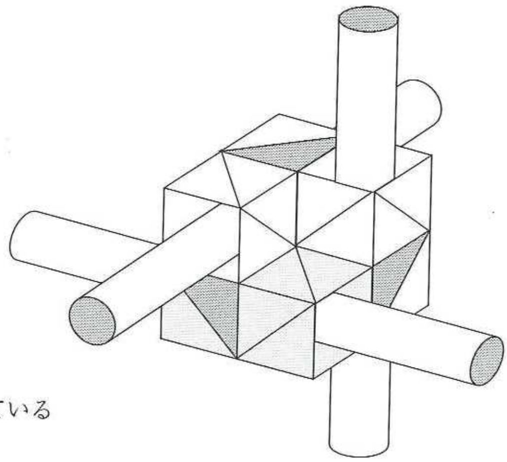


正ねじり分子



逆ねじり分子



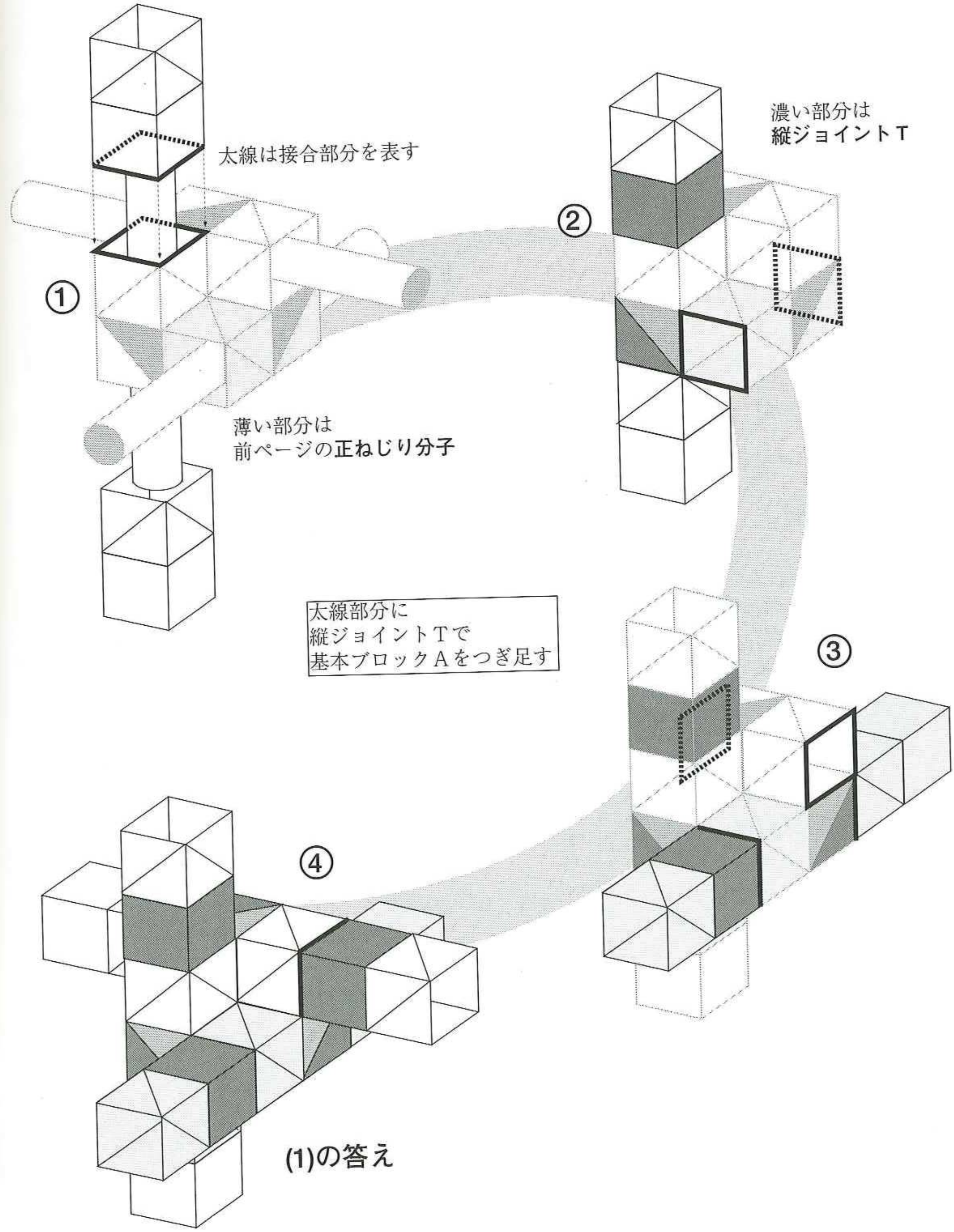


3方向に
穴があいている

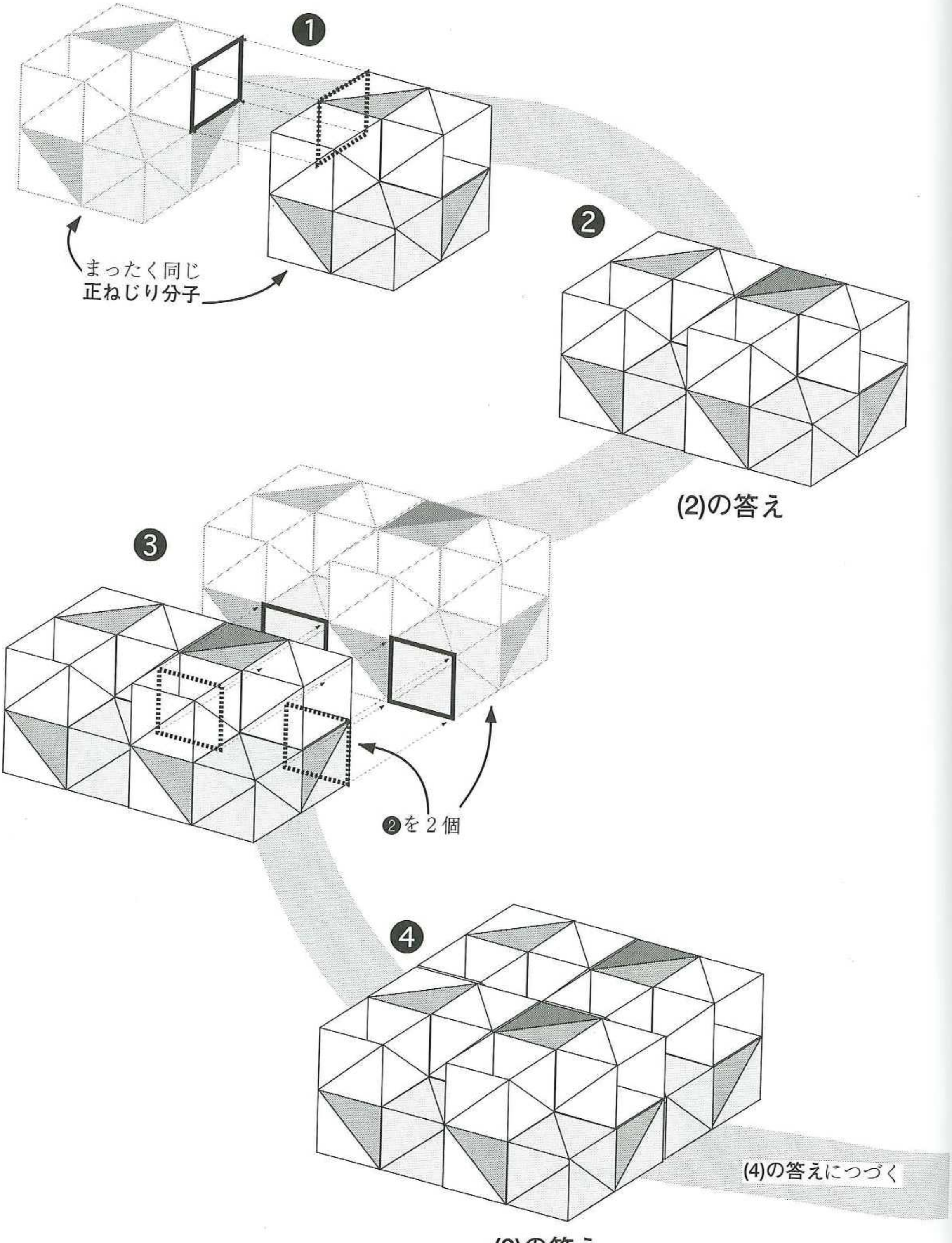
問題2.1-1

(1)　正ねじり分子の各ブロックの両端に縦ジョイントTで基本ブロックAをつぎ足しください．
(2)　2つの正ねじり分子を縦ジョイントTでつないでください．
(3)　4つの正ねじり分子を縦ジョイントTでつないでください．
(4)　8つの正ねじり分子を縦ジョイントTでつないでください．

(1)の答え　棒を通すようにつぎ足すブロックをもってきて，縦ジョイントTでつなぎます．なお**縦ジョイントT**は濃い色で示しています．

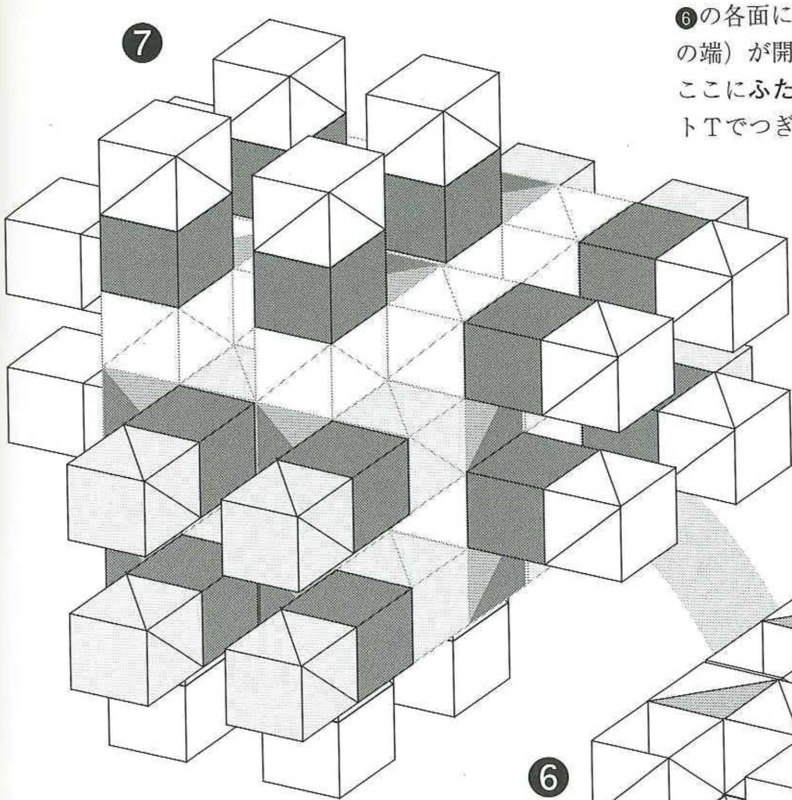


(2)(3)(4)の答え 太線を重ね合わせるように縦ジョイントTでつなぐだけですが，❸や❺は難しいので落ち着いて行ってください．

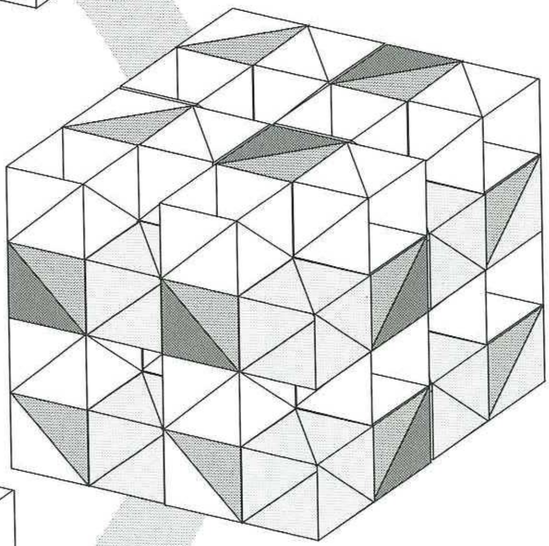


❻の各面には４個の穴（基本ブロックＡの端）が開いています．
ここにふたつきのブロックを縦ジョイントＴでつぎ足すと❼ができます．

❼

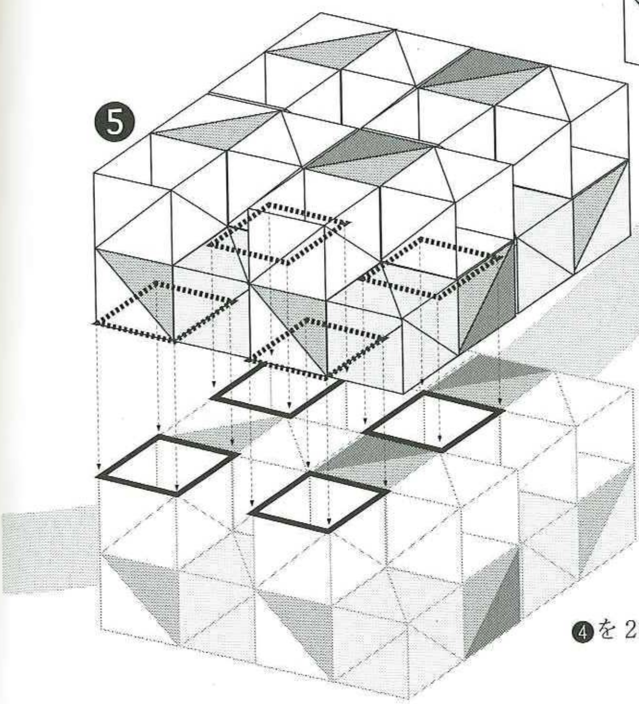


❻



(4)の答え

❺

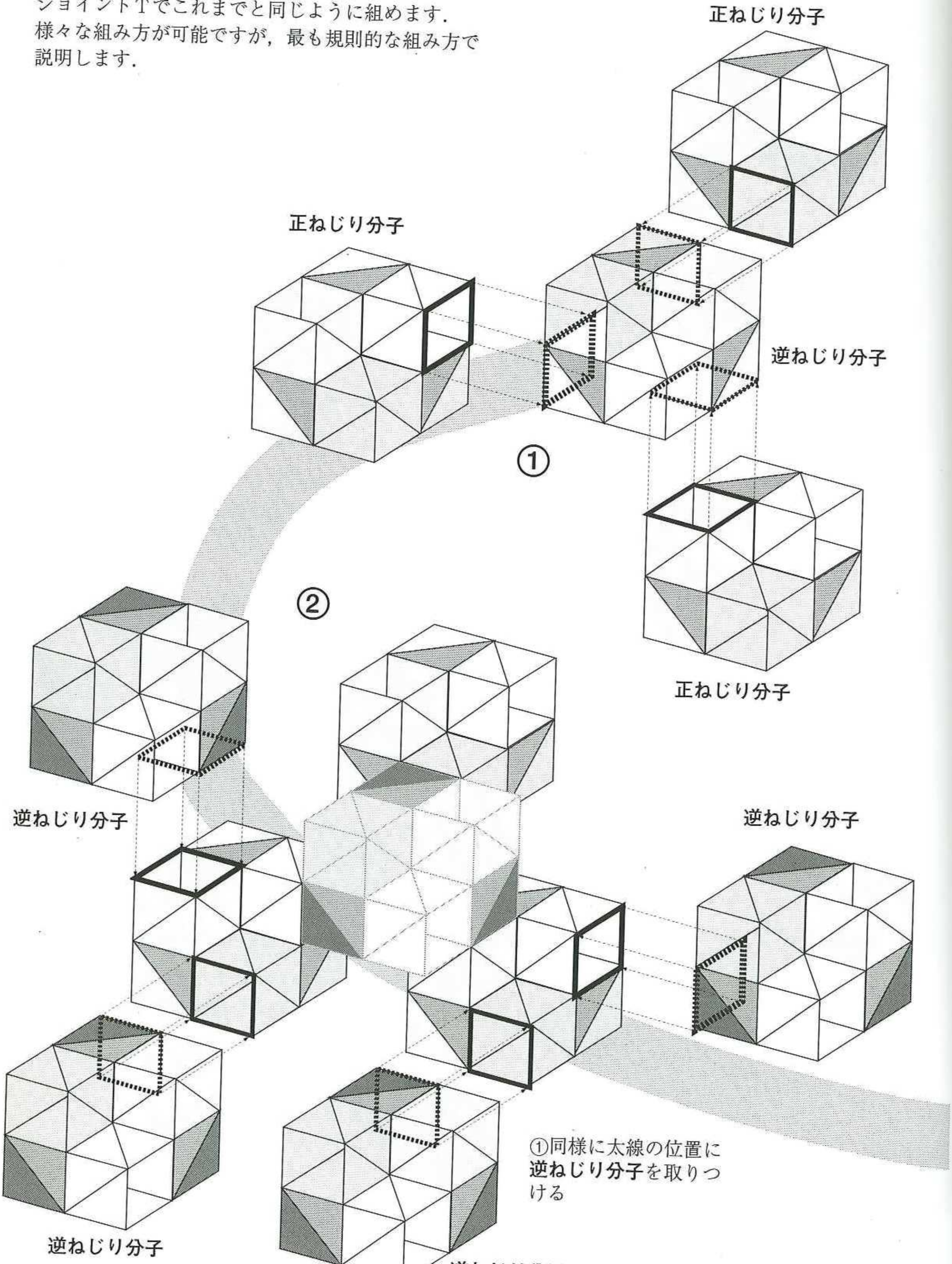


❺では８個の縦ジョイントＴを同時に差し込まなければなりません．
本書第１，２章中最難関です．
慎重に作業してください．

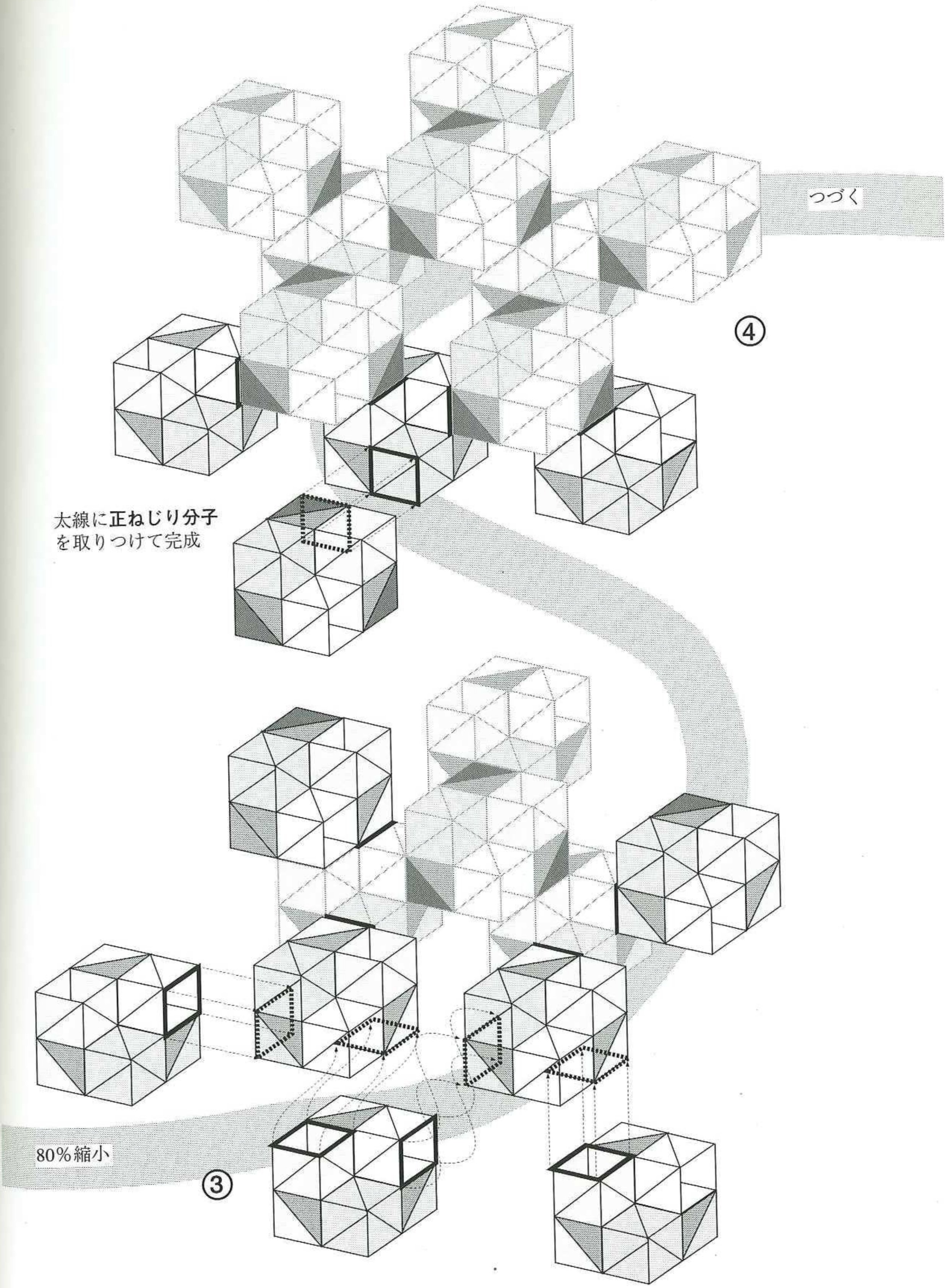
❹を２個

正逆ねじり分子混合組み

正ねじり分子と**逆ねじり分子**を組みましょう．縦ジョイントTでこれまでと同じように組めます．様々な組み方が可能ですが，最も規則的な組み方で説明します．

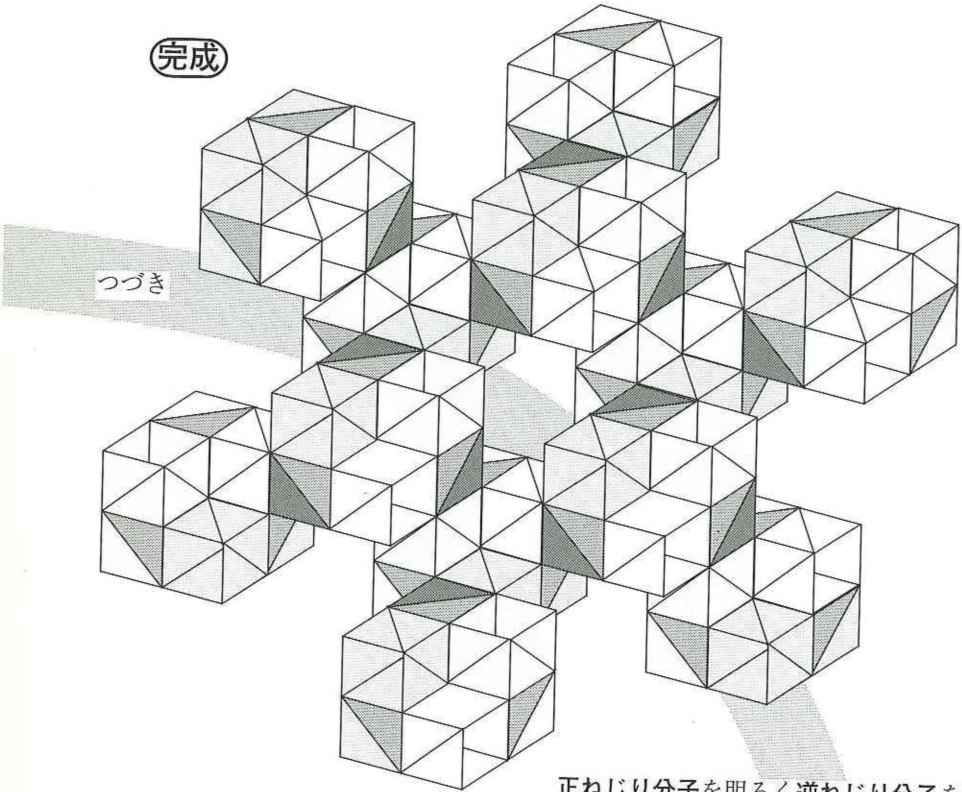


①同様に太線の位置に**逆ねじり分子**を取りつける

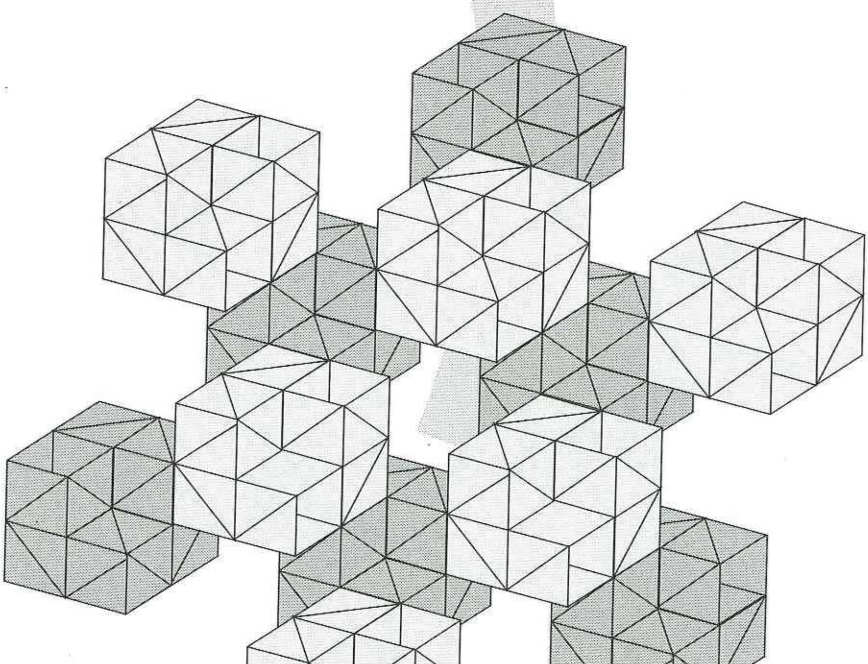


つづく
④
太線に正ねじり分子を取りつけて完成
80%縮小
③

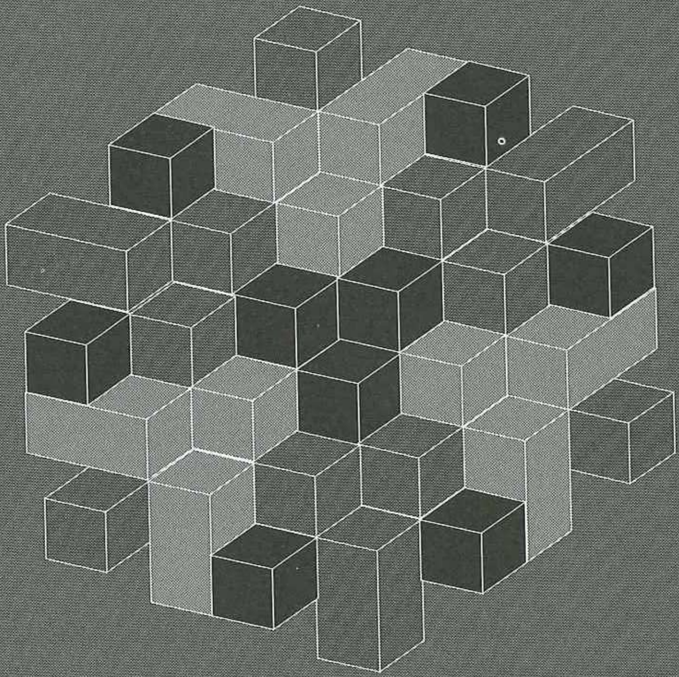
完成



正ねじり分子を明るく**逆ねじり分子**を暗く表示すると下のようになり，両分子が規則的に並んでいることがわかります



2.2

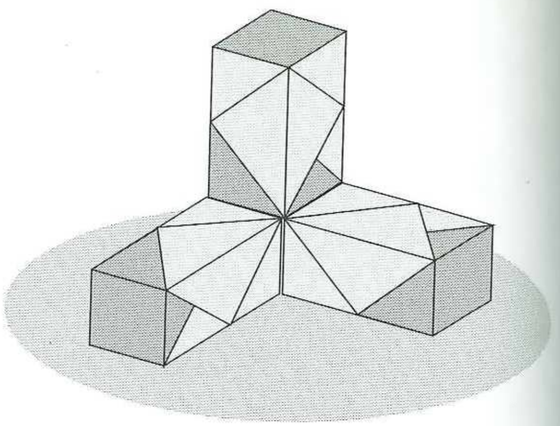


2.2 亀甲組み

亀甲組み
雪華

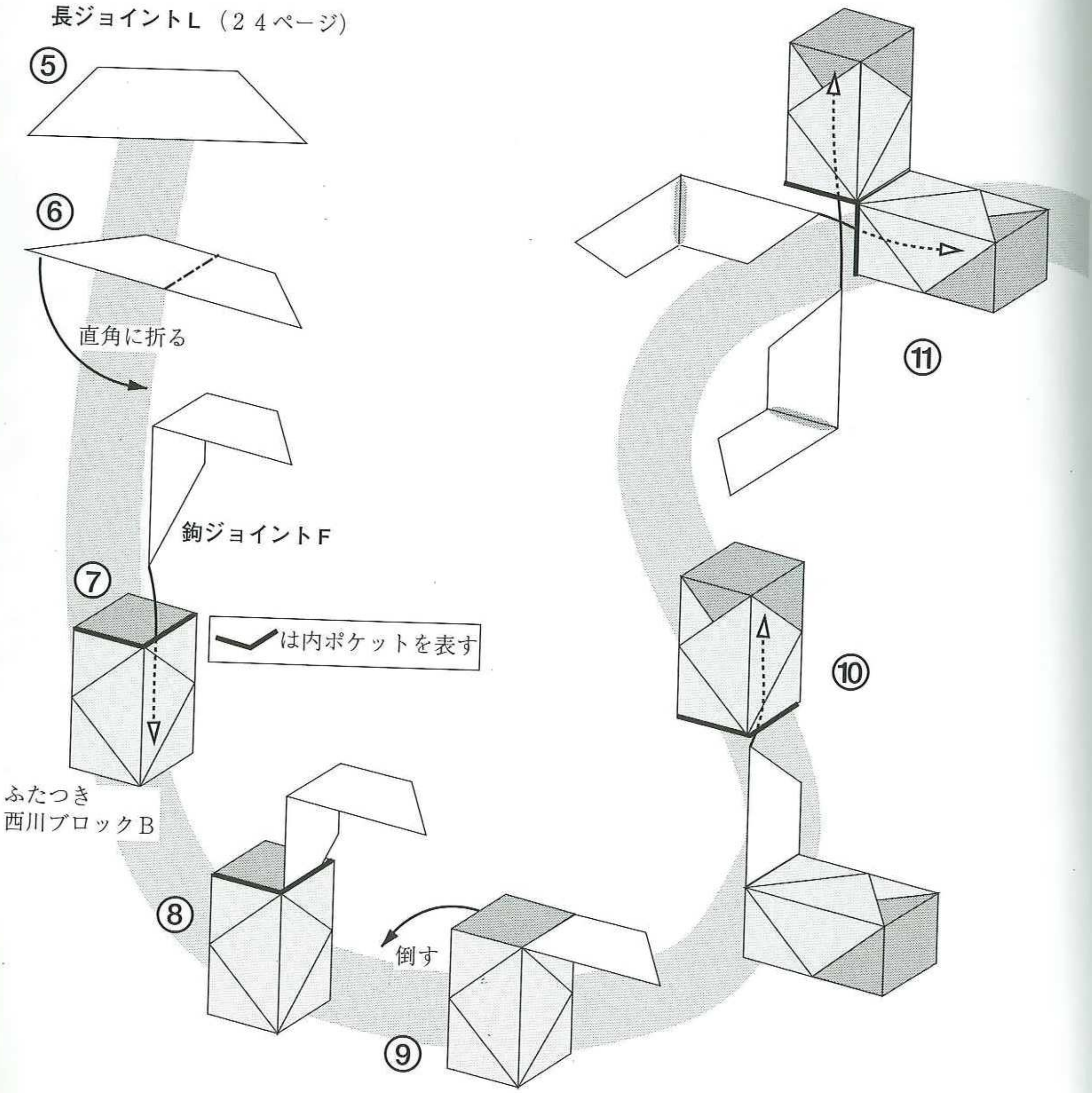
亀甲組み

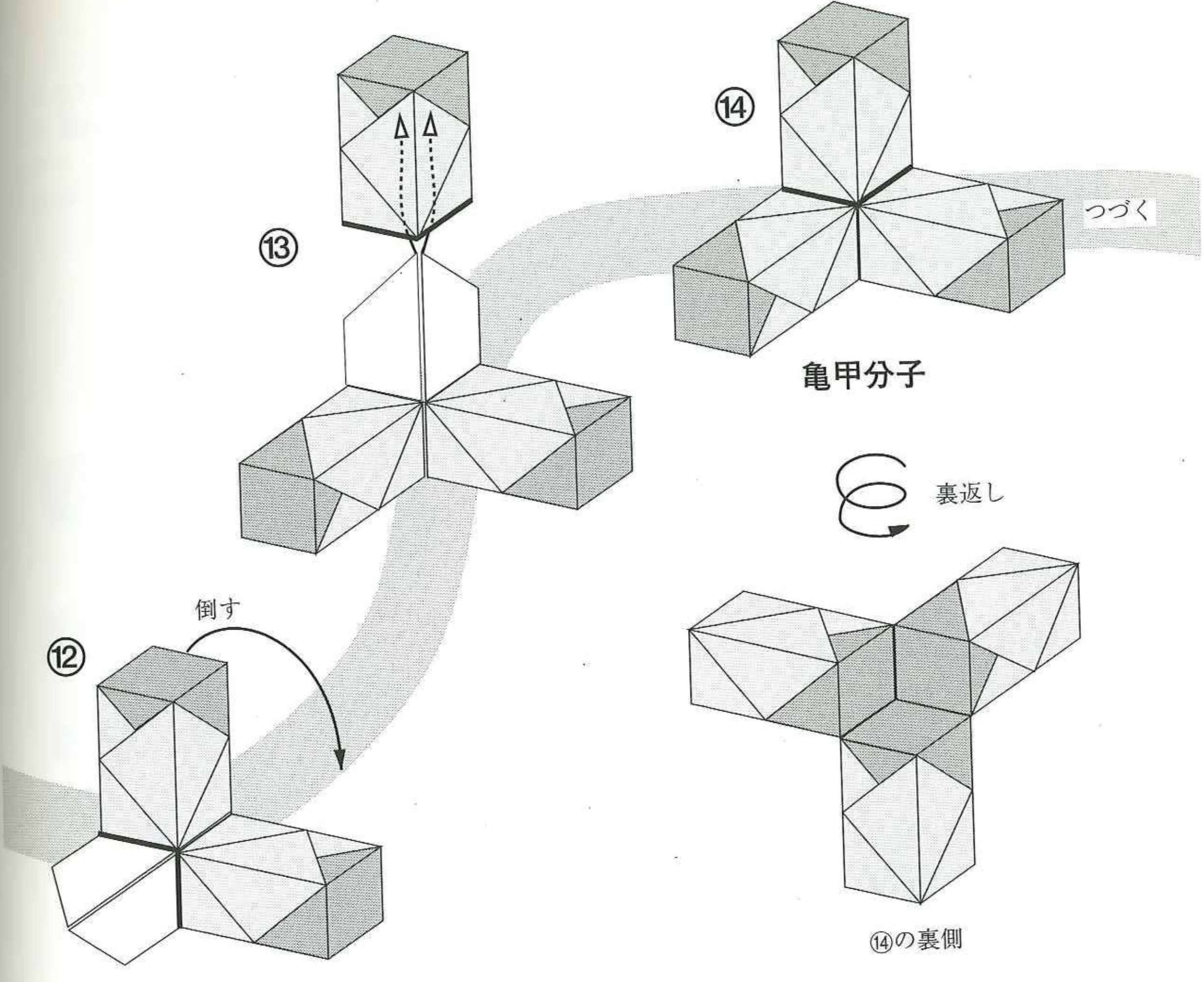
ふたつき西川ブロックＢを**鉤ジョイントＦ**で規則的に組むと，自然に六角形網目構造ができます．これを**亀甲組み**と呼びます．ブロック３個を亀甲組みしたもの（右図）を**亀甲分子**とよびます．
つめつき基本ブロックＡを西川ブロックＢの代わりに使うこともできます．



鉤ジョイントＦ

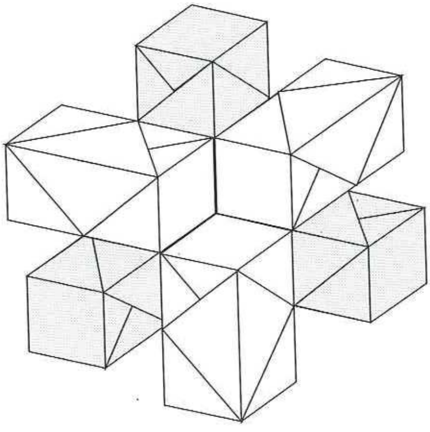
長ジョイントＬを半分に直角に折ったものです．

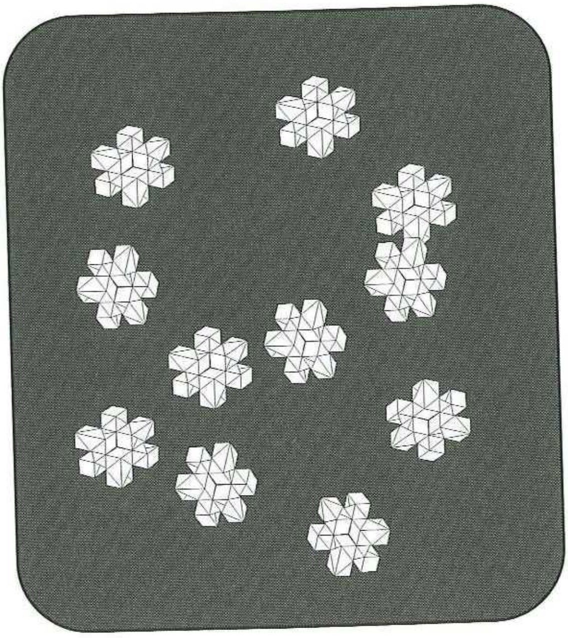


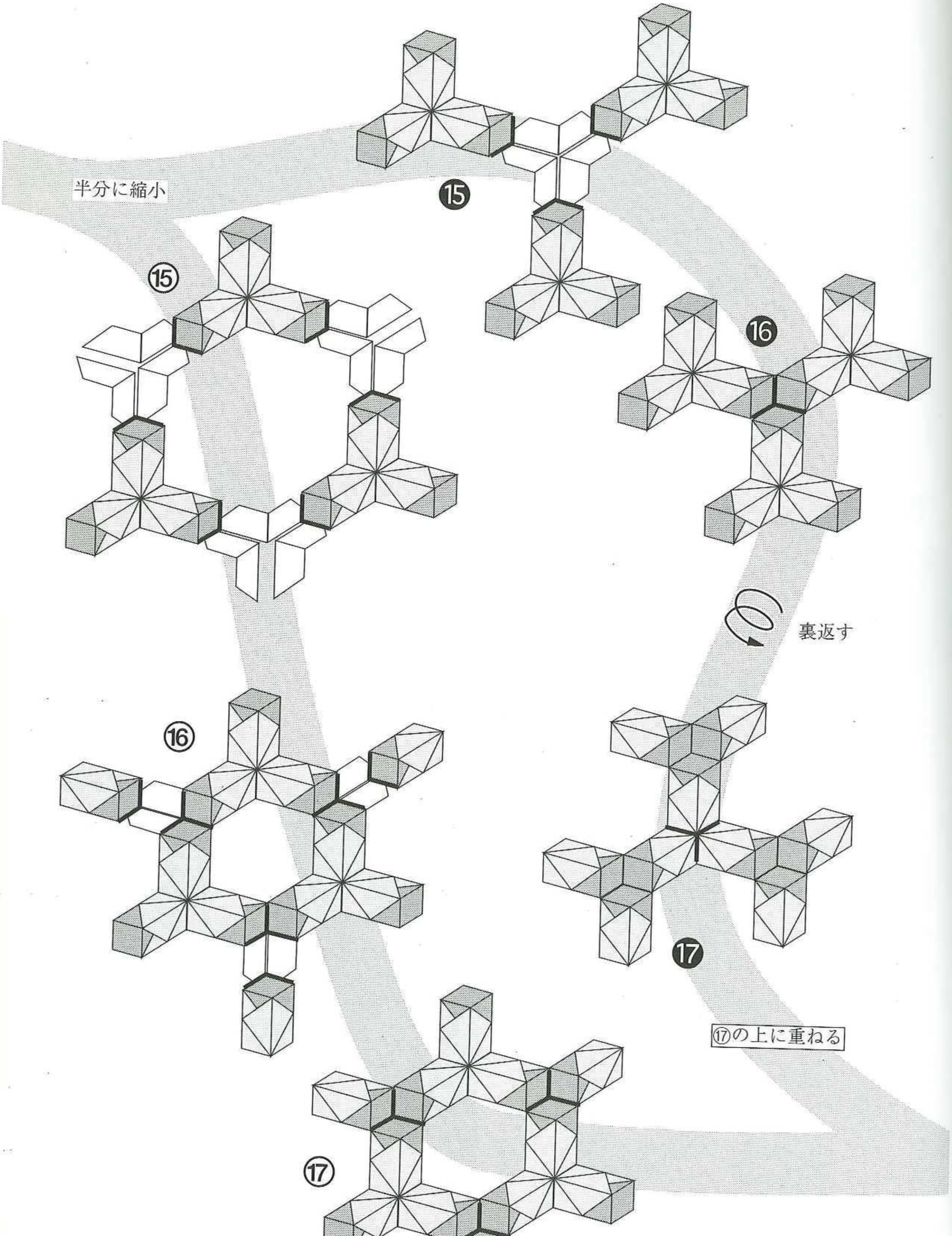


雪華

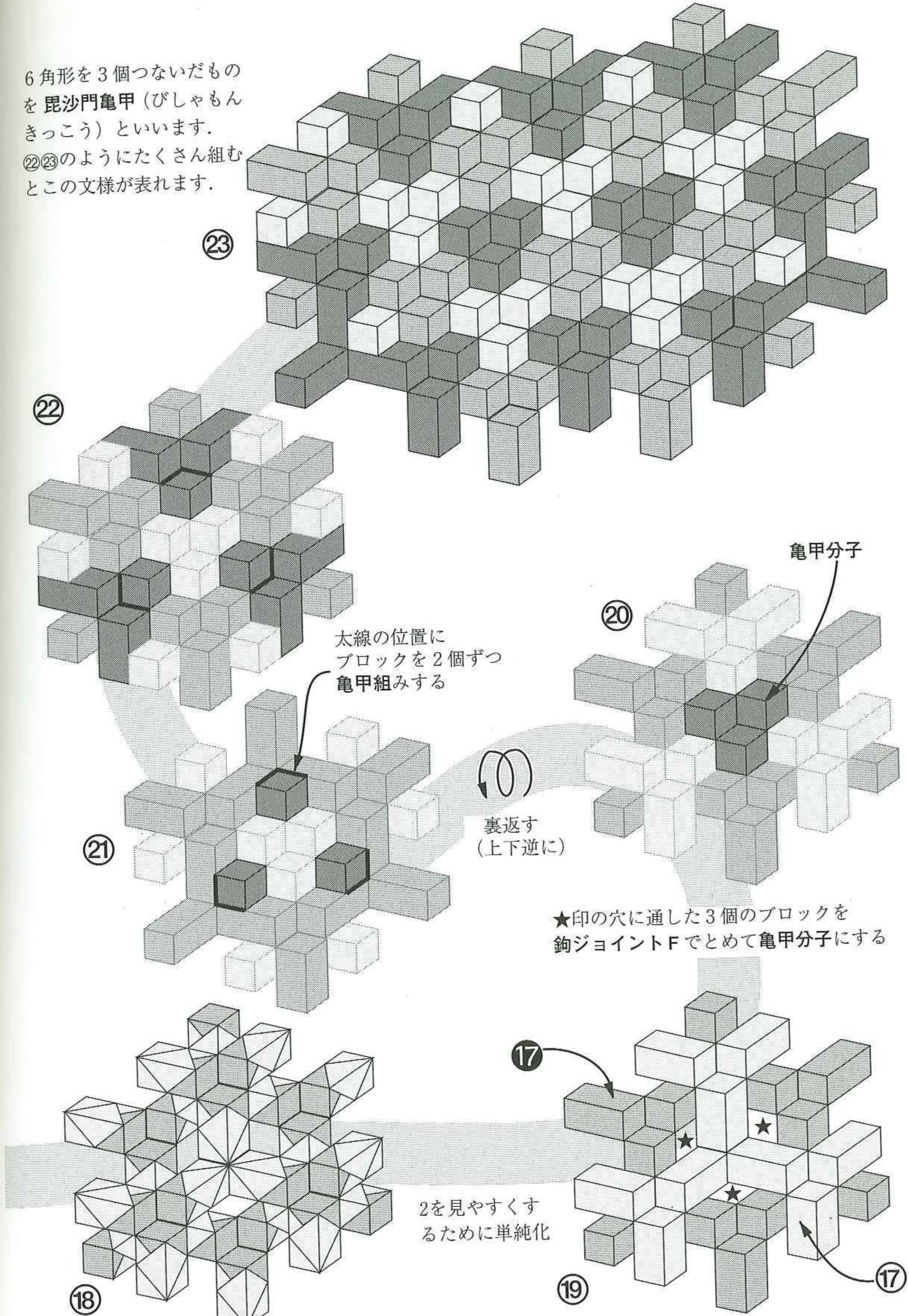
白い紙で作った**亀甲分子**を２つ重ねたものです．なるべく小さい紙で折ってください．





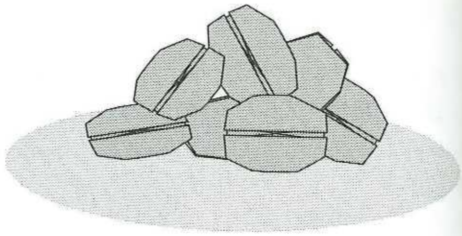

⑮
半分に縮小
⑮
⑯
裏返す
⑯
⑰
⑰の上に重ねる
⑰

6角形を3個つないだものを**毘沙門亀甲**（びしゃもんきっこう）といいます．㉒㉓のようにたくさん組むとこの文様が表れます．



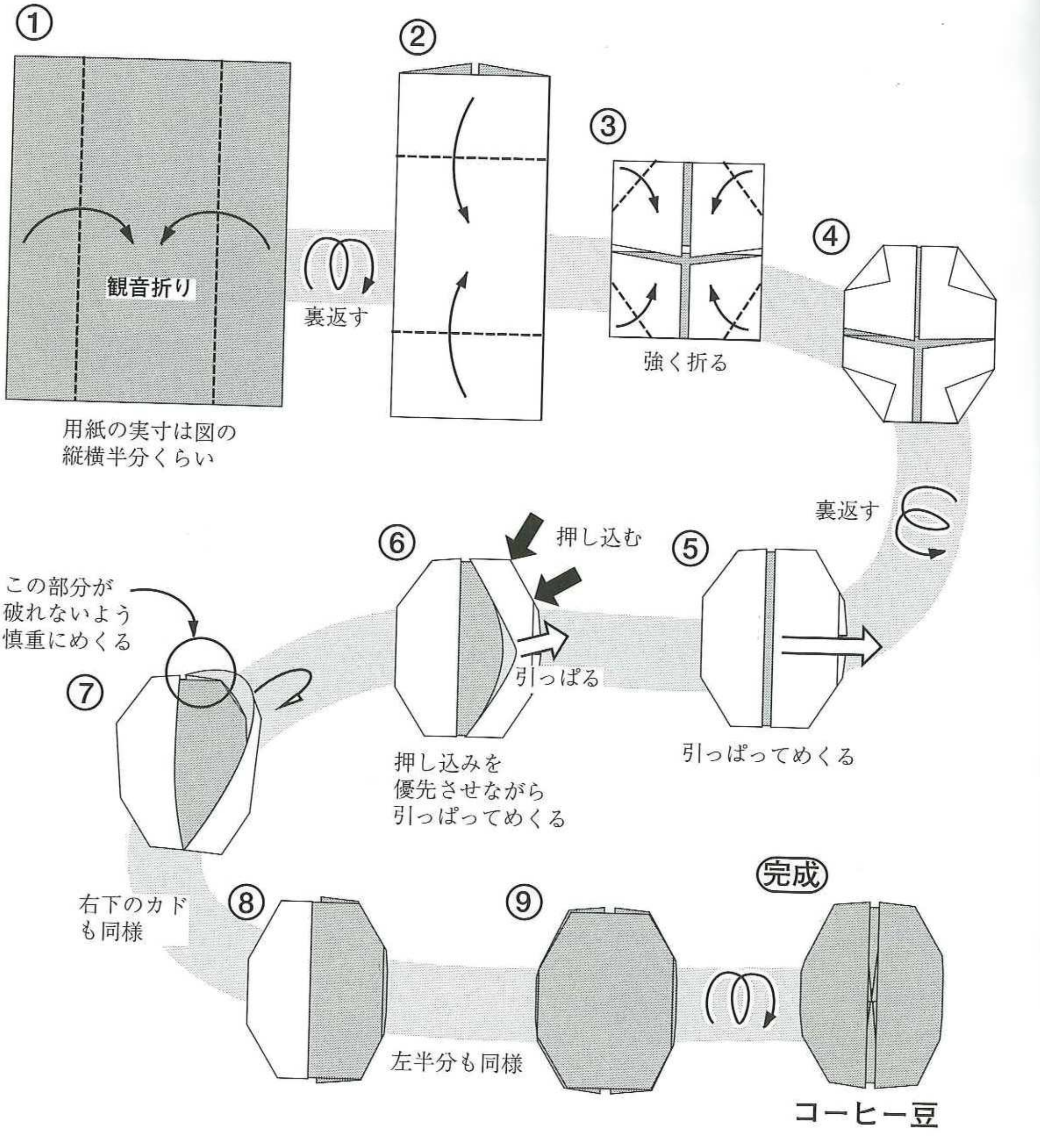
コーヒーブレイク

お疲れ様でした．第II部に入る前に一服しましょう．でもコーヒーは自分で入れてください．

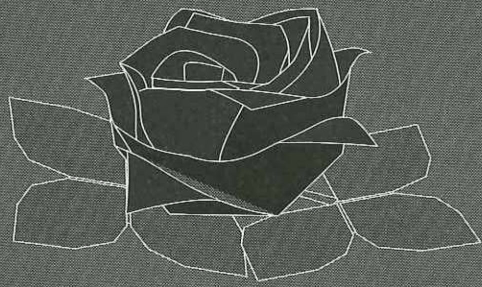


コーヒー豆 (1.5cm×2cmくらいの和紙)

ボートを折る技法の応用です．小さく切った焦げ茶色の和紙で折ってください．用紙サイズは1.5cm×2cmが目安です．用紙サイズ同様，折り線の位置や角度もだいたいで構いません．



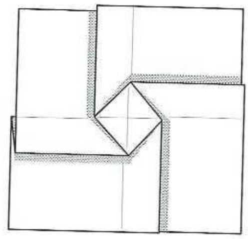
第Ⅱ部　バラ



ねじり折り
バラのつぼみ
バラ
4つ葉
バラの葉
ピラミッド

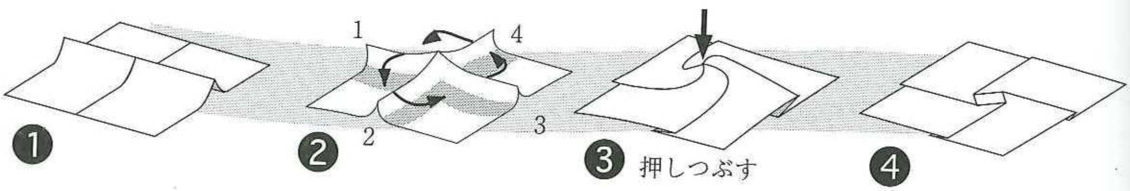
ねじり折り

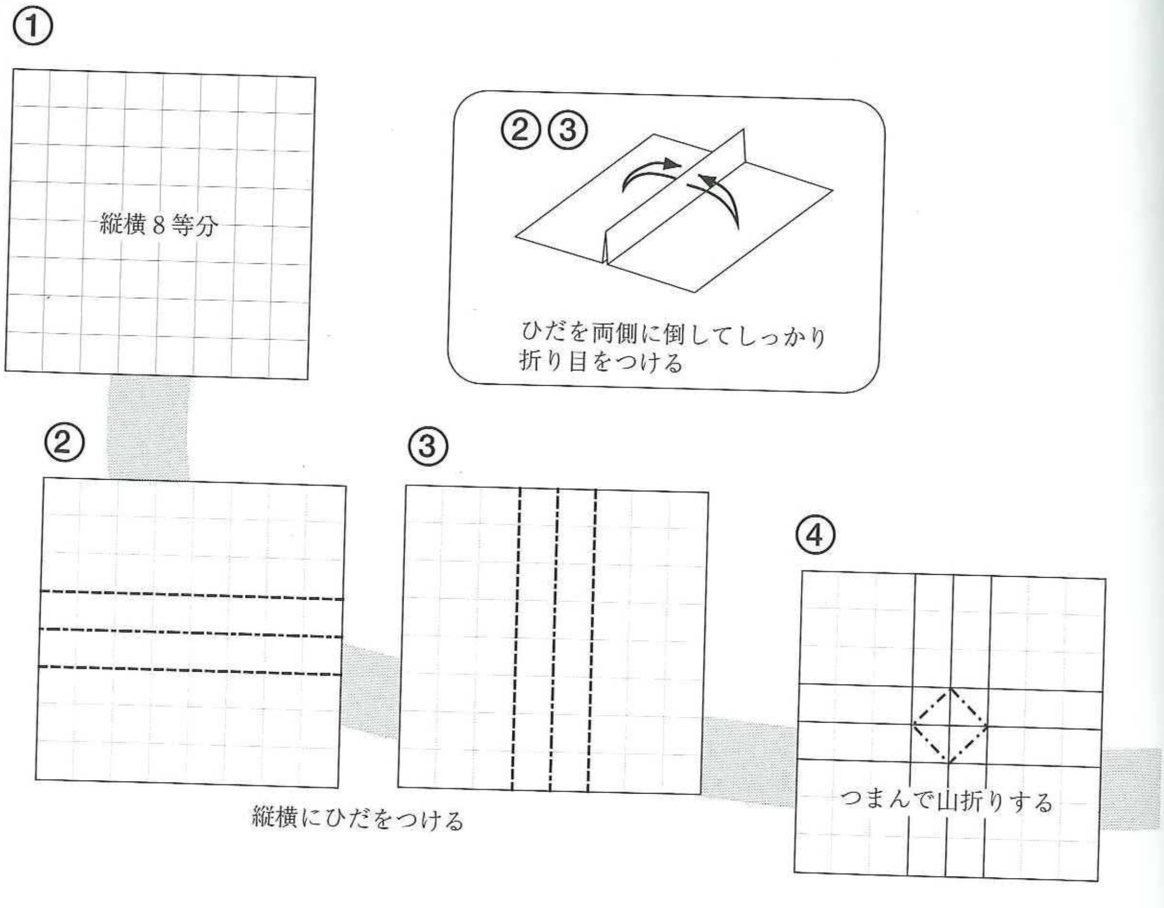
右図のように複数のひだが出会った所をねじりながらつぶしたものを**ねじり折り**といいます．①のようにあらかじめ縦横等間隔に折り目をつけて折るときれいに仕上がります．内山光弘氏はねじり折りを発展させた**花紋折り**で独自の美の世界を築きました．また桃谷好英氏や藤本修三氏はねじり折りをつなぐことで，**平織り（結晶折り紙）**を生み出しました（文献［U］，［Mo］，［F］）．このあと紹介する **バラのつぼみ**はねじり折りを立体化したものです．

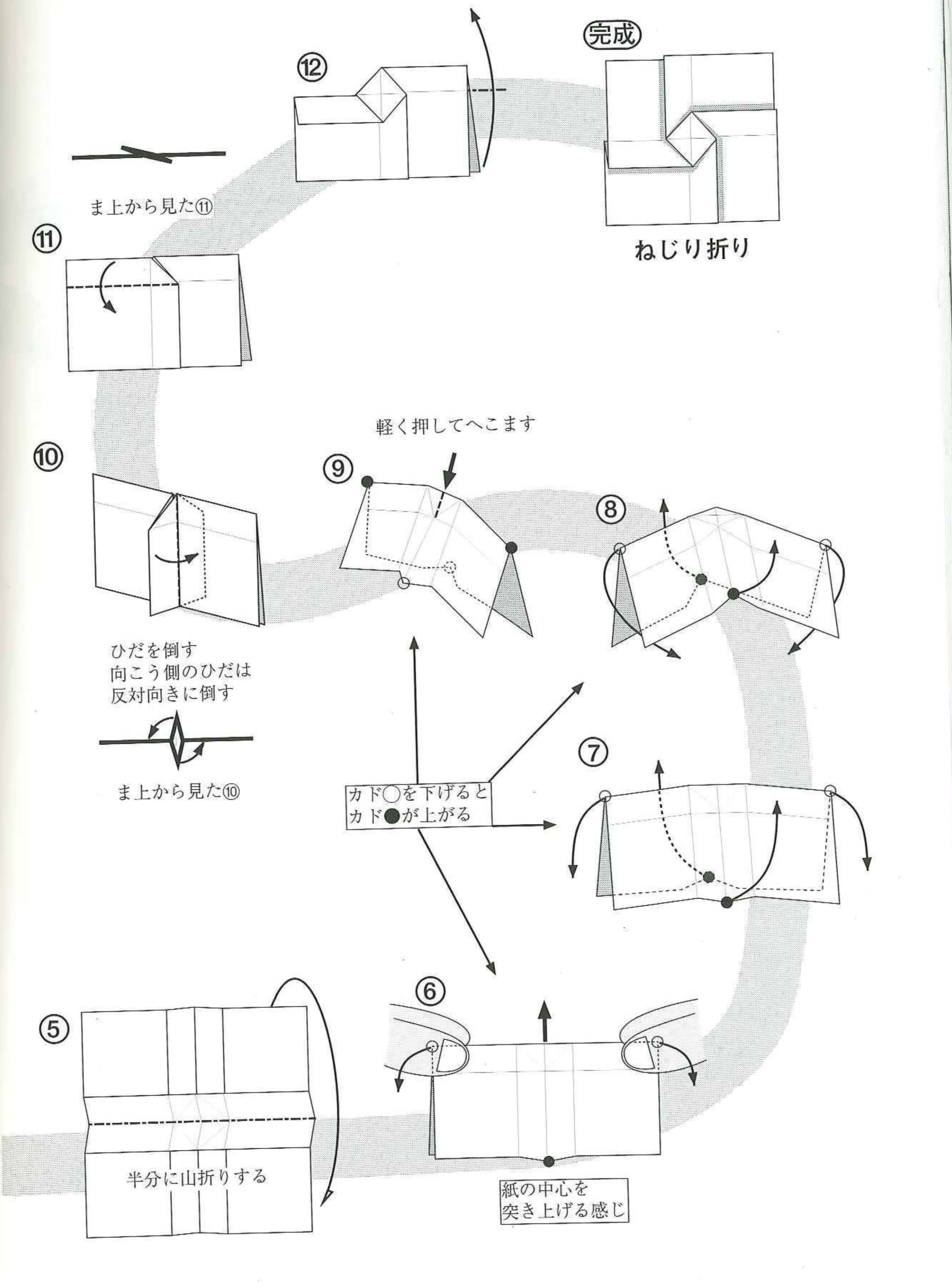


ねじり折りの原理

複数のひだが出会った所は紙がだぶついています．きれいにまとめるためにこの部分をねじりながら押しつぶしたものが**ねじり折り**です．ひだは３本以上ならいくつでも構いませんが，直交する４本のひだで折るのが最も簡単です．

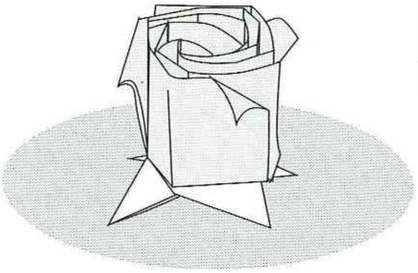


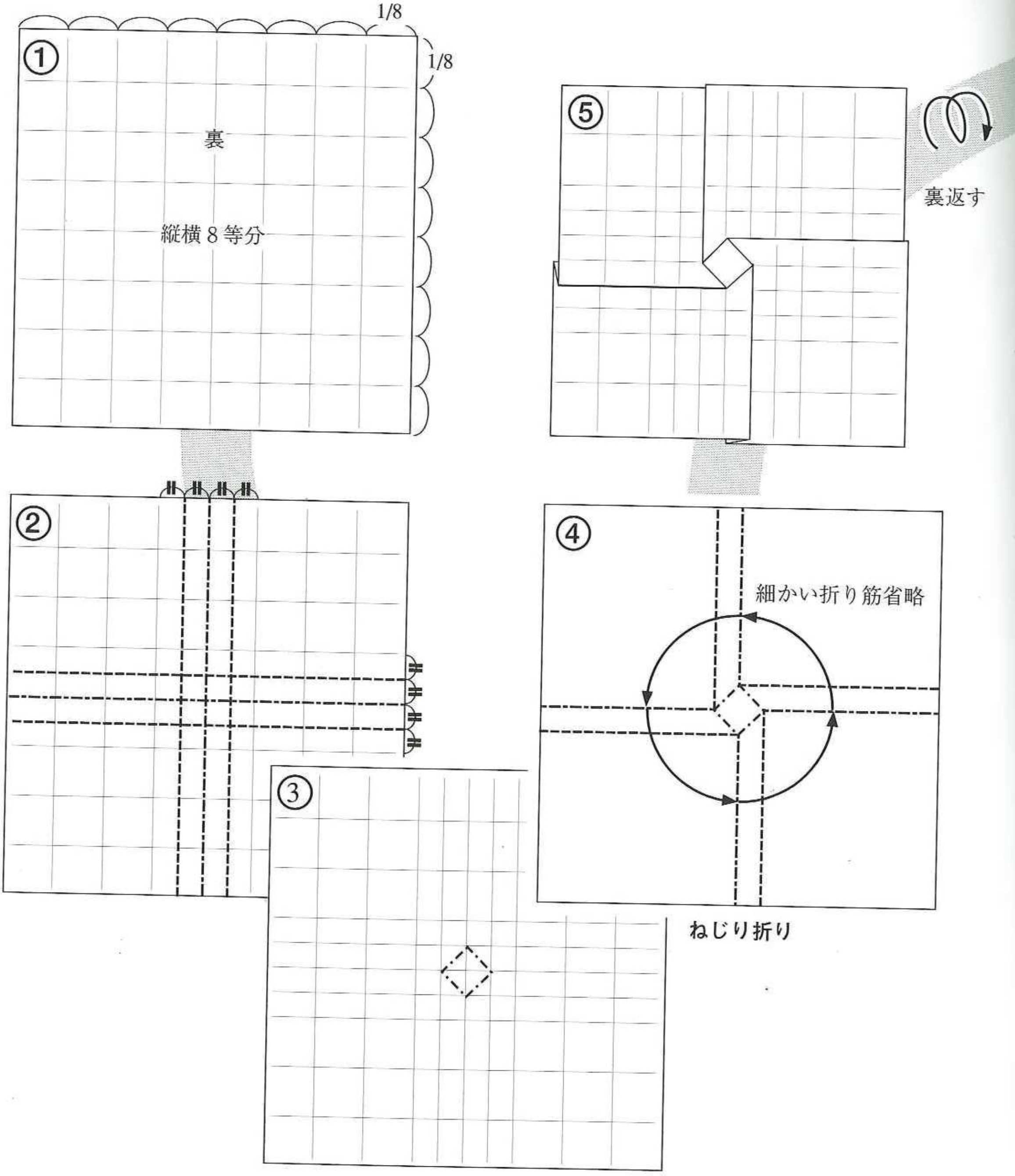


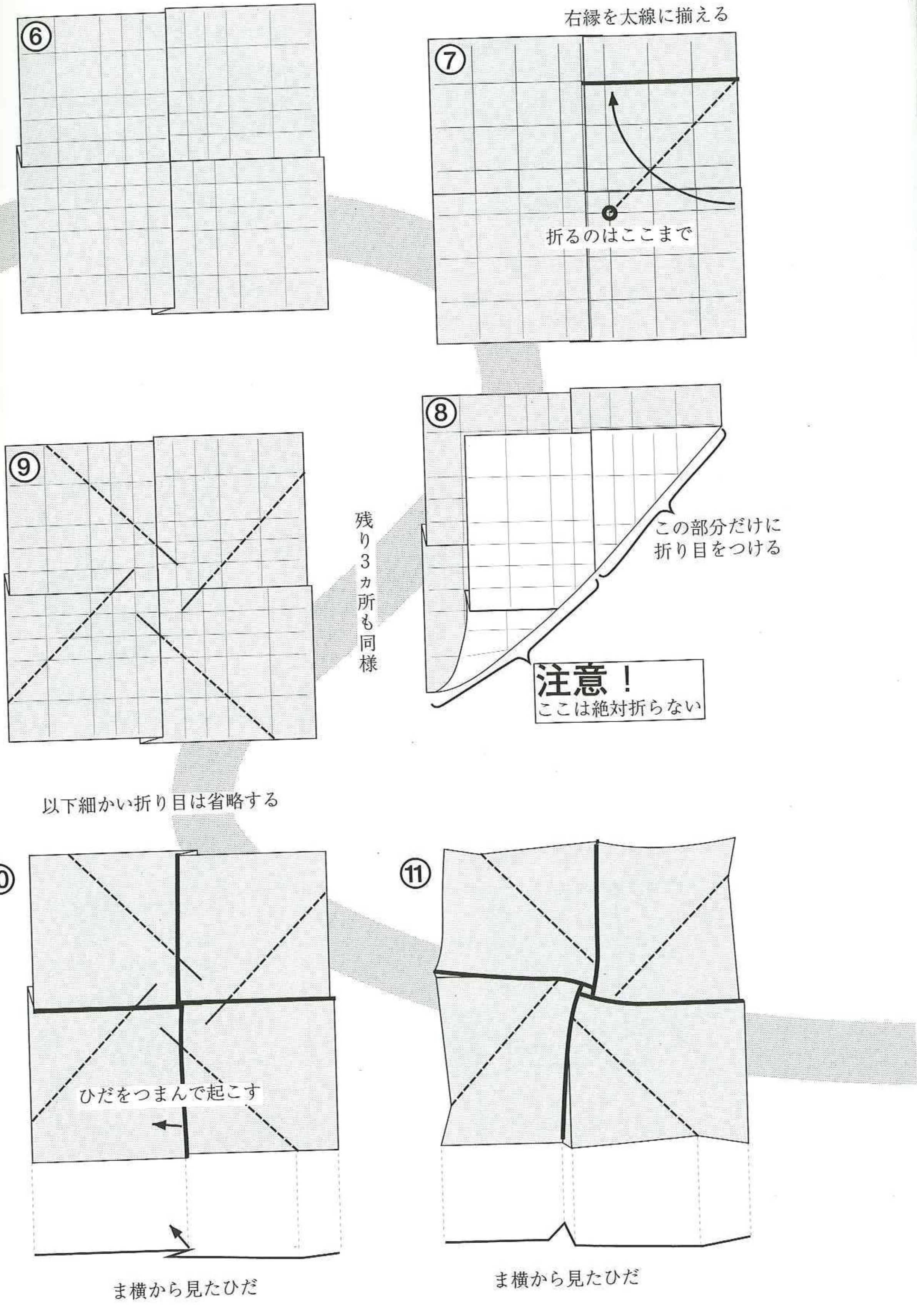

⑫
完成
ねじり折り
ま上から見た⑪
⑪
軽く押してへこます
⑩
⑨
⑧
ひだを倒す
向こう側のひだは
反対向きに倒す
ま上から見た⑩
⑦
カド○を下げると
カド●が上がる
⑤
半分に山折りする
⑥
紙の中心を
突き上げる感じ

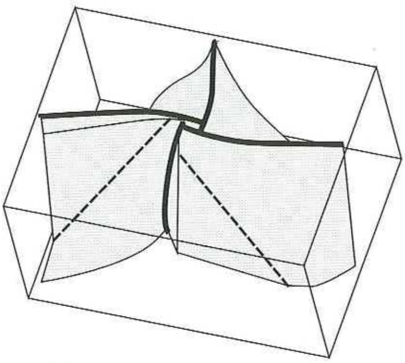
バラのつぼみ (P1)

ねじり折りを立体的にして用紙のカドをまとめると，**バラのつぼみ**ができます．８等分するのはガクをきれいに折りだすためです．



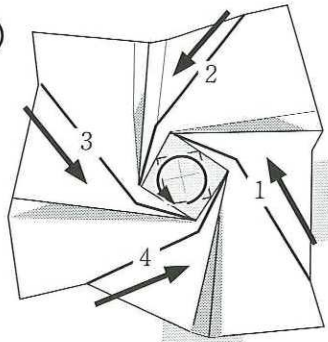



⑥
右縁を太線に揃える
⑦
折るのはここまで
⑧
この部分だけに
折り目をつける
注意！
ここは絶対折らない
⑨
残り3ヵ所も同様
以下細かい折り目は省略する
⑩
ひだをつまんで起こす
ま横から見たひだ
⑪
ま横から見たひだ



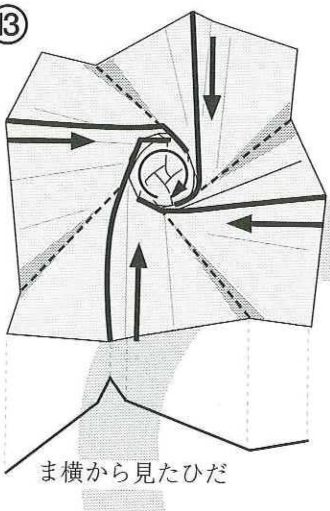
⑬を斜め上から見たところ．太い曲線は直方体枠の上面（長方形）にある．

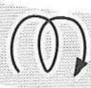
⑮



中心部分が回転するように，４つのひだをつまんで，矢印方向に少しずつ押す．

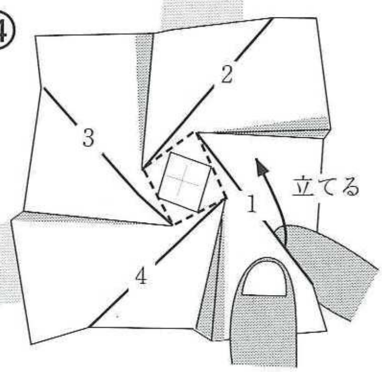
⑬





裏返す

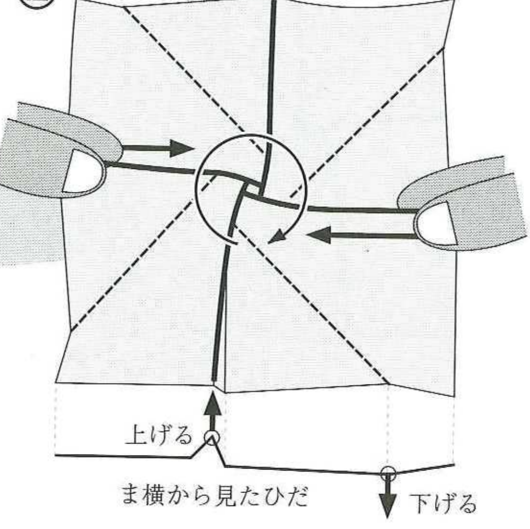
⑭



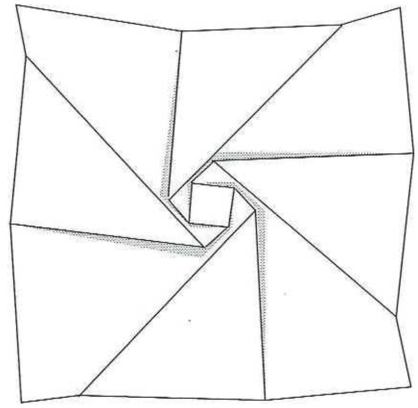
山折り線１～４をつまんで少しずつ立てる．この時まん中の四角い**谷折り線**をきちんとつけるのがコツ．

中心部分が矢印の向きに回転するようにひだをつまんで両側から軽く押す

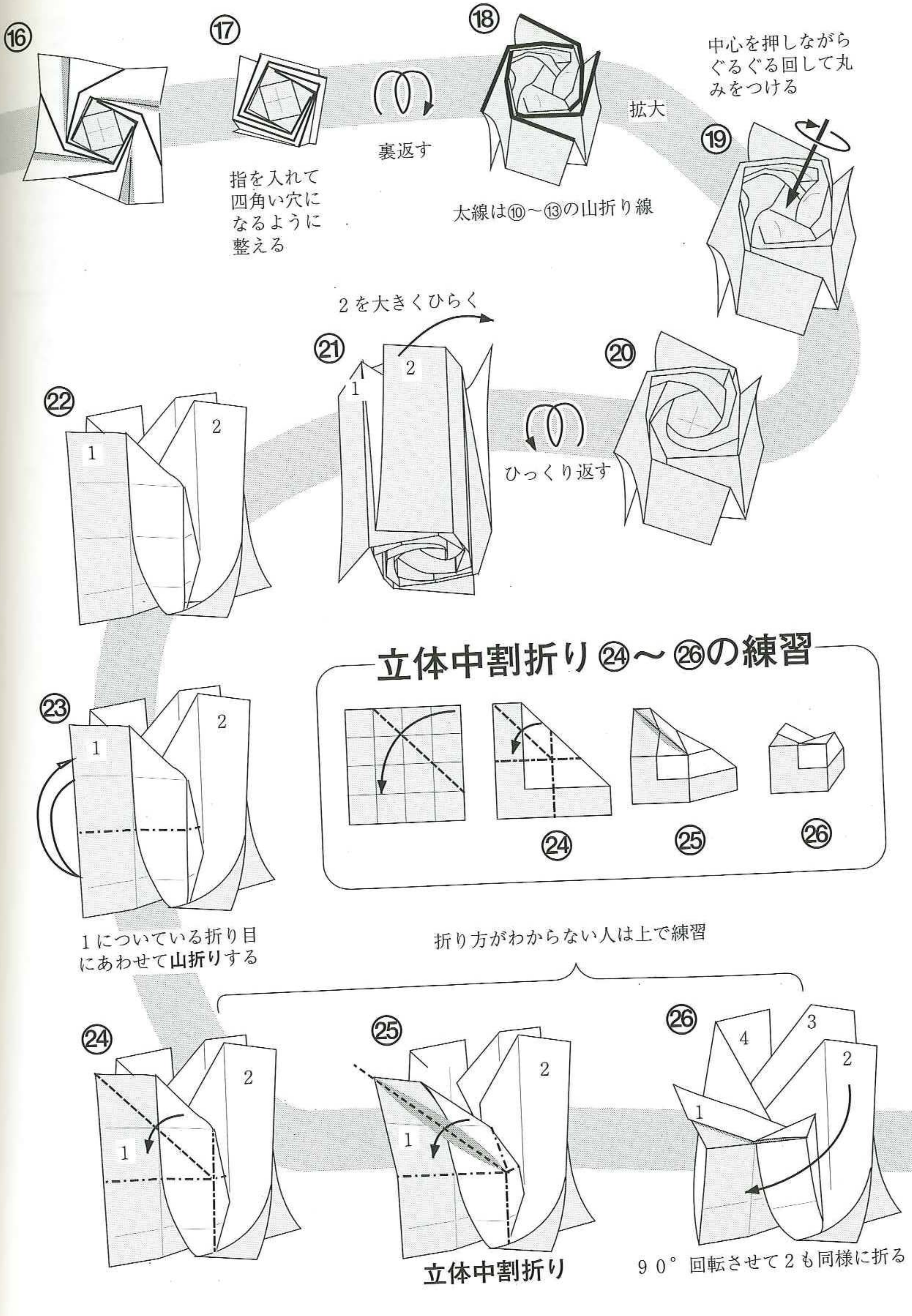
⑫

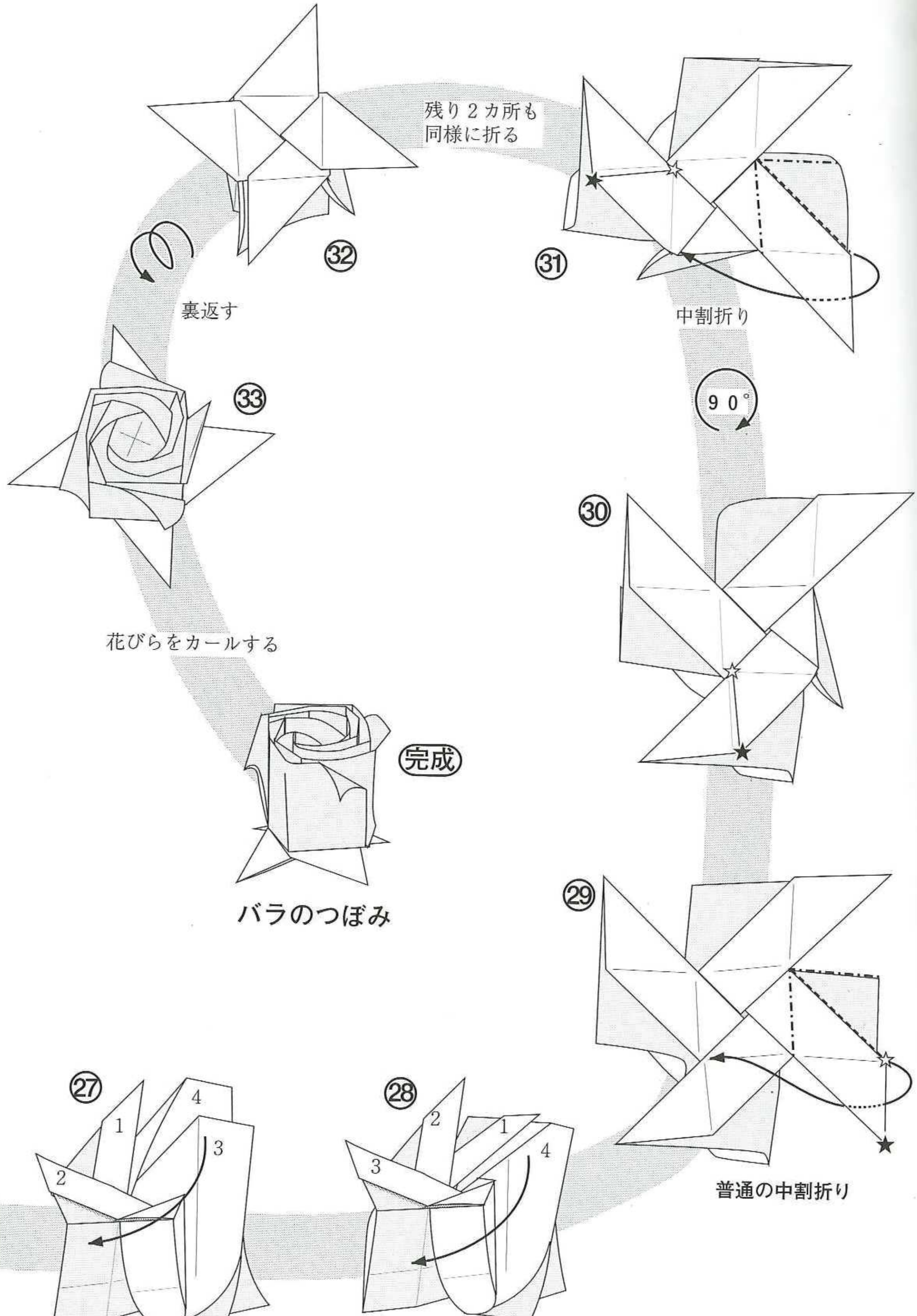


⑫



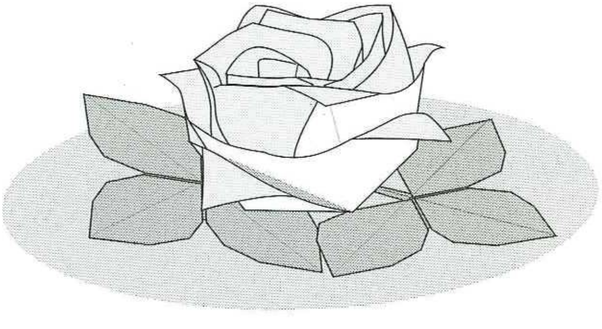
⑫の裏

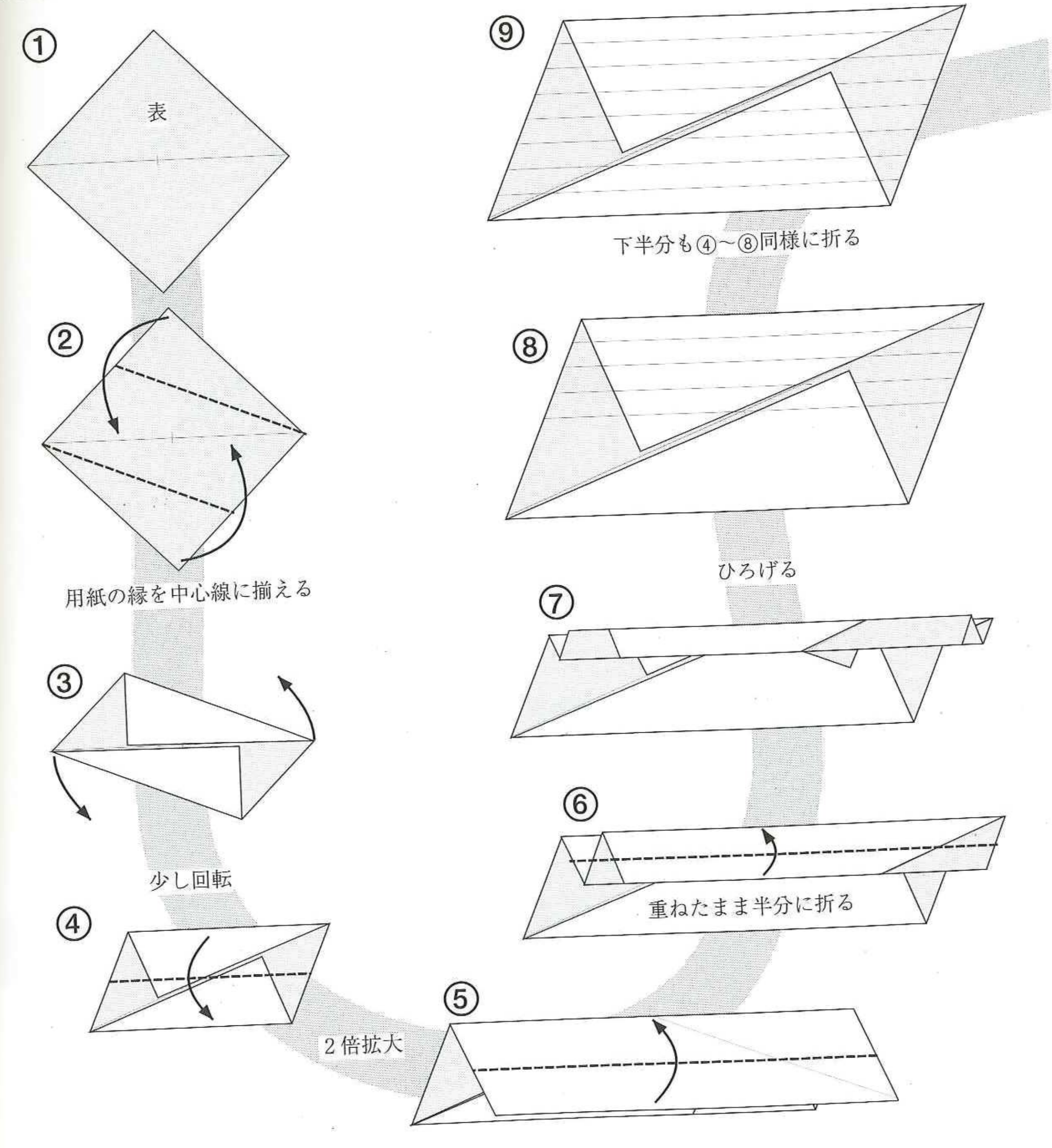

⑯
⑰
指を入れて
四角い穴に
なるように
整える
裏返す
⑱
太線は⑩〜⑬の山折り線
拡大
中心を押しながら
ぐるぐる回して丸
みをつける
⑲
⑳
ひっくり返す
㉑
2を大きくひらく
1
2
㉒
1
2
㉓
1
2
1についている折り目
にあわせて山折りする
立体中割折り㉔〜㉖の練習
㉔
㉕
㉖
折り方がわからない人は上で練習
㉔
1
2
㉕
1
2
立体中割折り
㉖
1
2
3
4
９０° 回転させて２も同様に折る


㉜
残り２カ所も
同様に折る
㉛
裏返す
中割折り
㉝
９０°
㉚
花びらをカールする
完成
バラのつぼみ
㉙
普通の中割折り
㉗
1
2
3
4
㉘
2
1
3
4
3，４も同様に折る

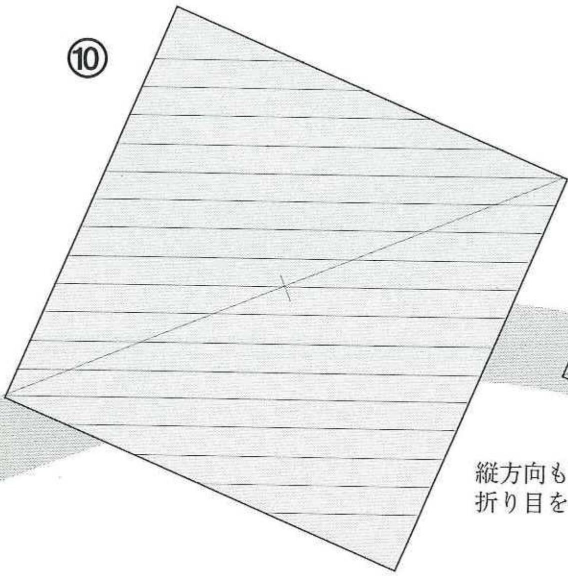
バラ

(20cm×20cmくらいの和紙)
基本構造は**バラのつぼみ**と同じですが，斜めの折り目や花びらを増やす行程⑰～⑲のためにバラのつぼみより随分難しくなります．必ずバラのつぼみが楽に折れるようになってから挑戦してください．このバラが折れれば折り紙仲間に一目置かれること間違いなし！ 失敗してもめげないでください．コツは説明文をとばさずに読むことです．



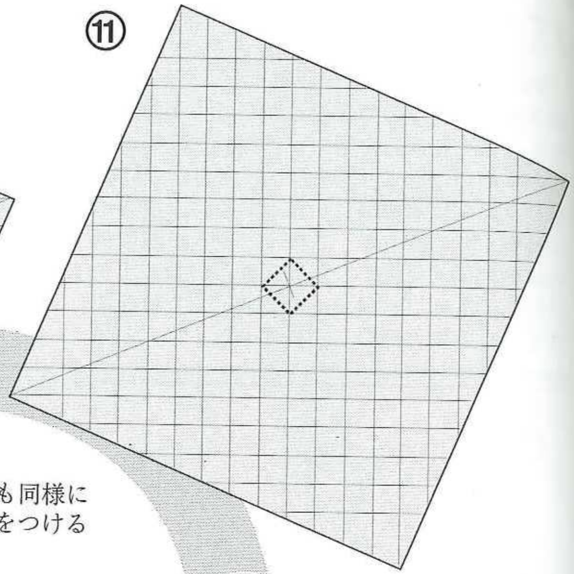


⑩



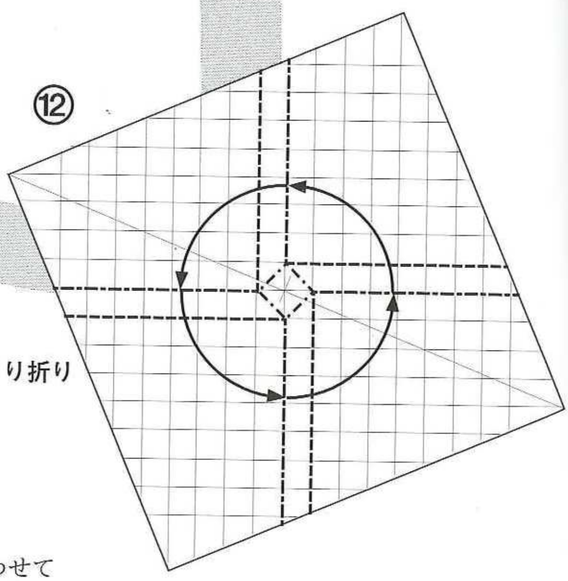
縦方向も同様に
折り目をつける

⑪



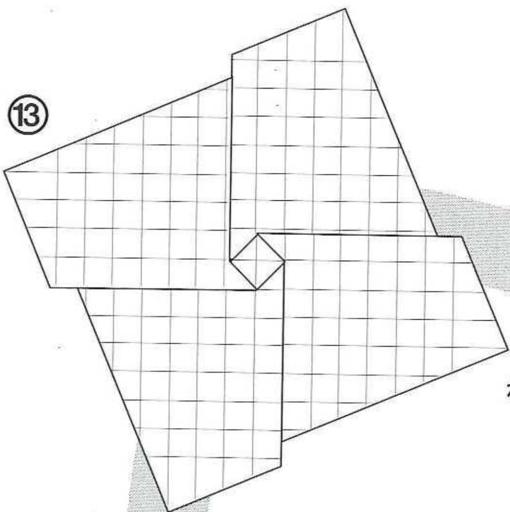
裏返す

⑫



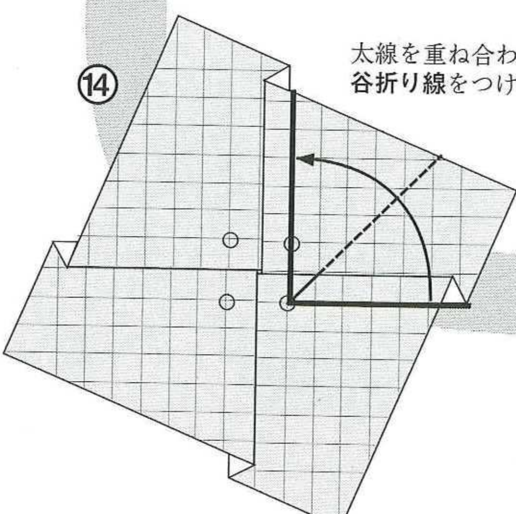
ねじり折り

⑬

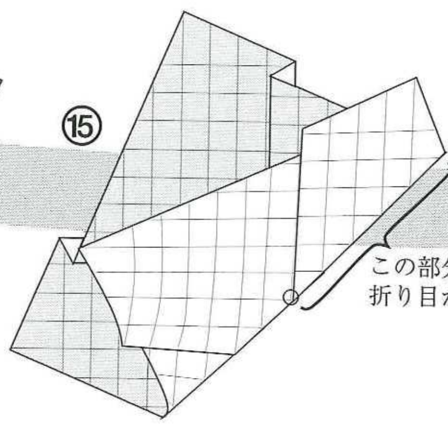


⑭

太線を重ね合わせて
谷折り線をつける



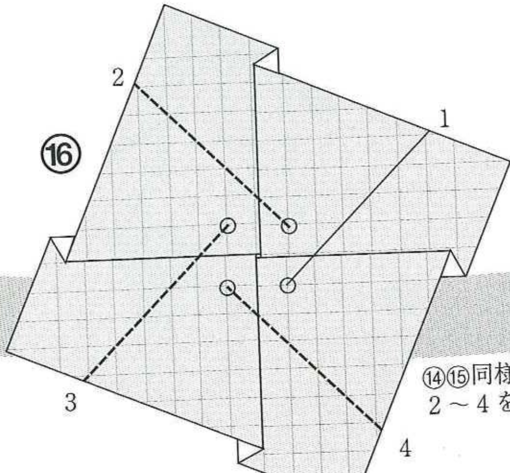
⑮



この部分にだけ
折り目がつく

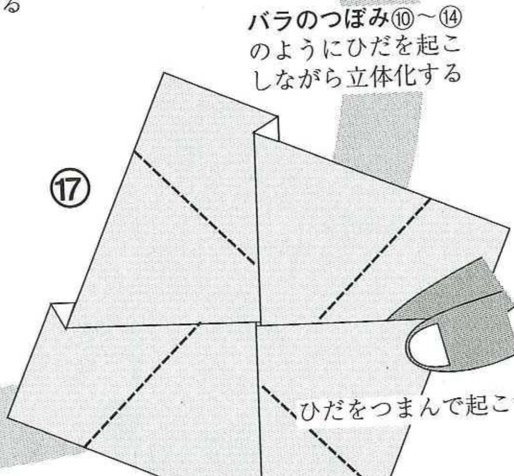
つづく

⑯



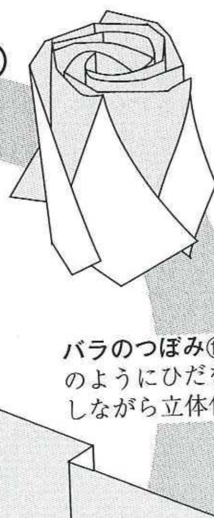
⑭⑮同様に折り目
2～4をつける

⑰



ひだをつまんで起こす

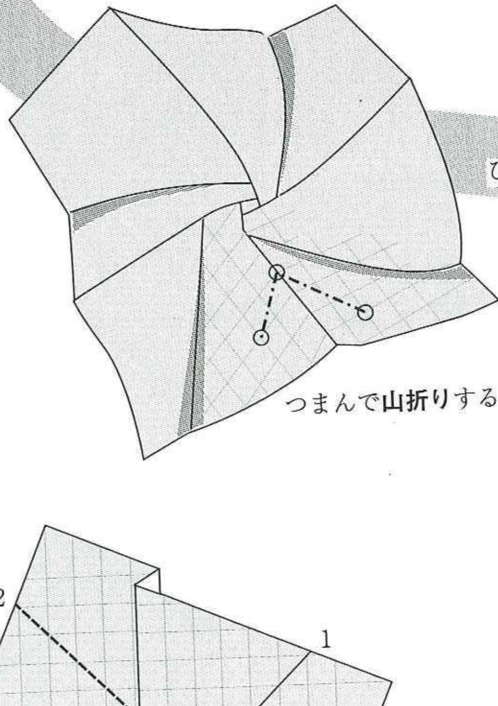
⑱



バラのつぼみ⑩～⑭
のようにひだを起こ
しながら立体化する

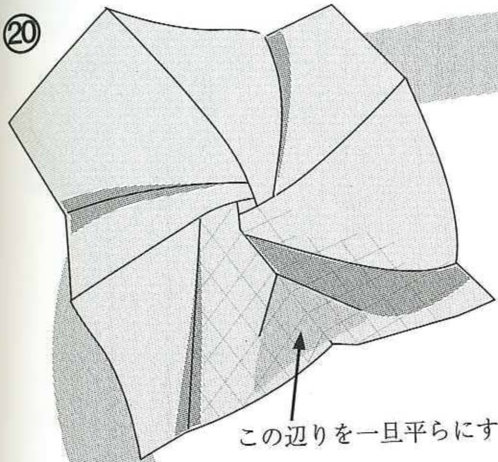
ひろげる

⑲



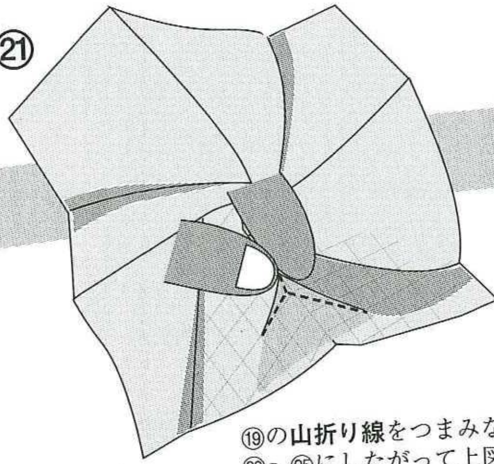
つまんで**山折り**する

⑳

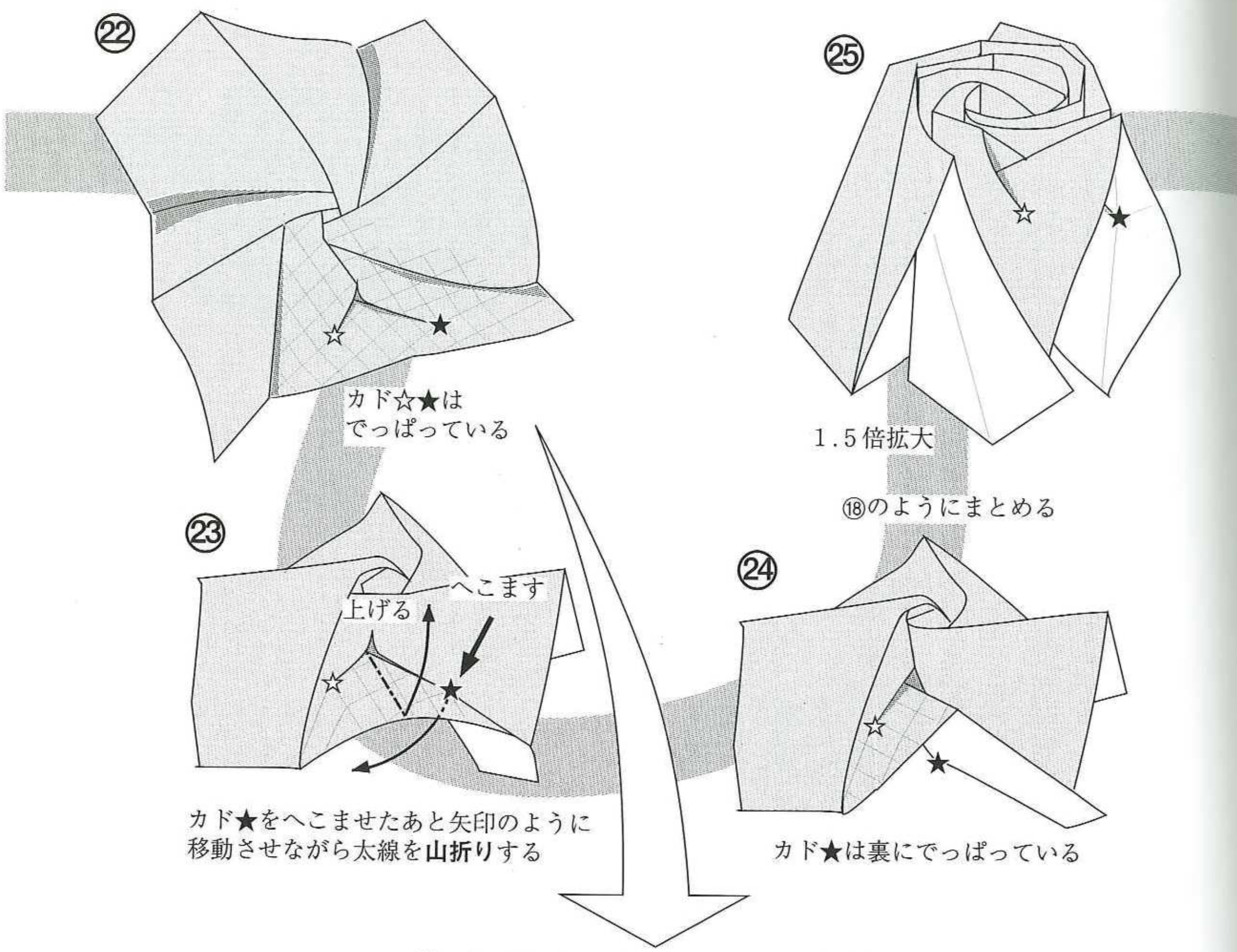


この辺りを一旦平らにする

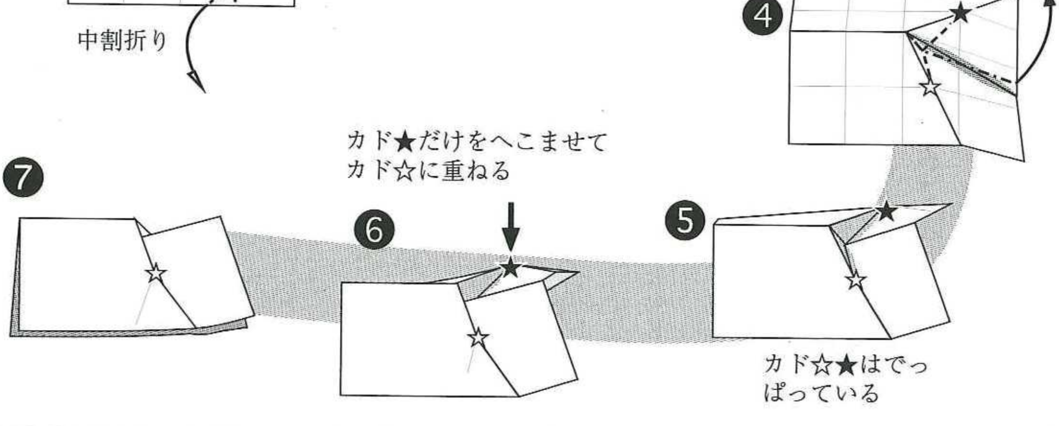
㉑



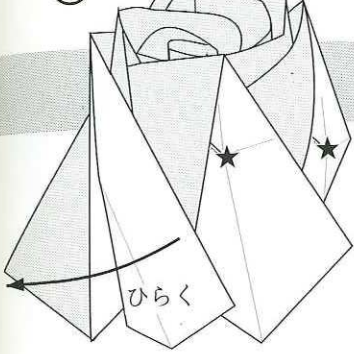
⑲の**山折り線**をつまみながら
㉒～㉕にしたがって上図の
谷折り線をつける


㉒
カド☆★は
でっぱっている
㉓
上げる
へこます
カド★をへこませたあと矢印のように
移動させながら太線を**山折り**する
㉔
カド★は裏にでっぱっている
⑱のようにまとめる
㉕
1.5倍拡大

花弁増し⑲～㉕の練習

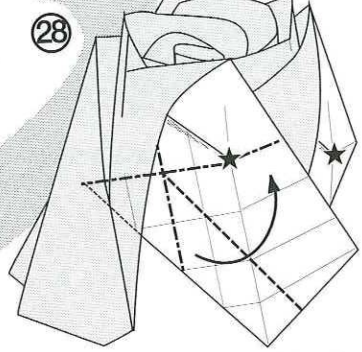

❶
中割折り
❷
❸
❹
❺
カド☆★はでっ
ぱっている
カド★だけをへこませて
カド☆に重ねる
❻
❼

㉖



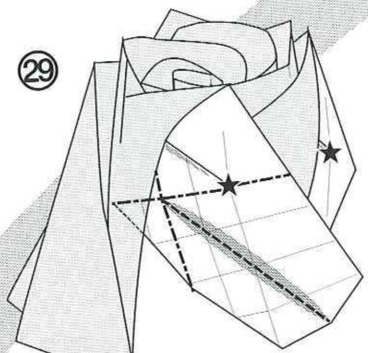
㉗

㉘



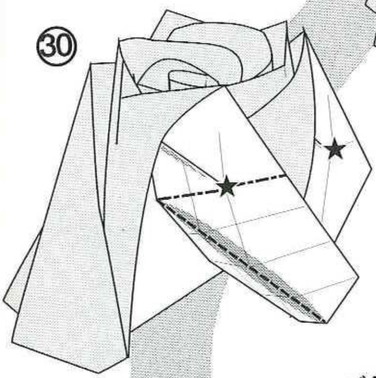
バラのつぼみ⑰と同じく
2枚重ねたまま折る

㉙



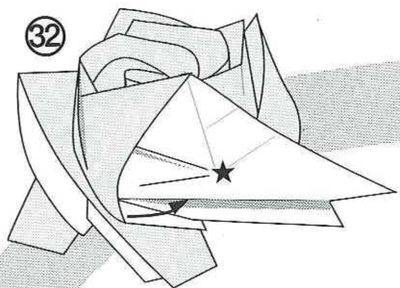
バラのつぼみ⑱と同じ

㉚



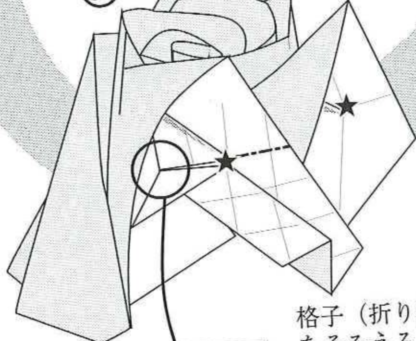
バラのつぼみ⑲と同じ

㉜

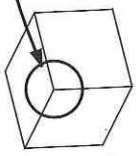


花びらのたるみをすき間
（影）に押し込む

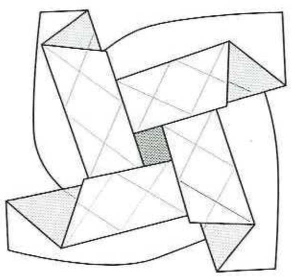
㉛



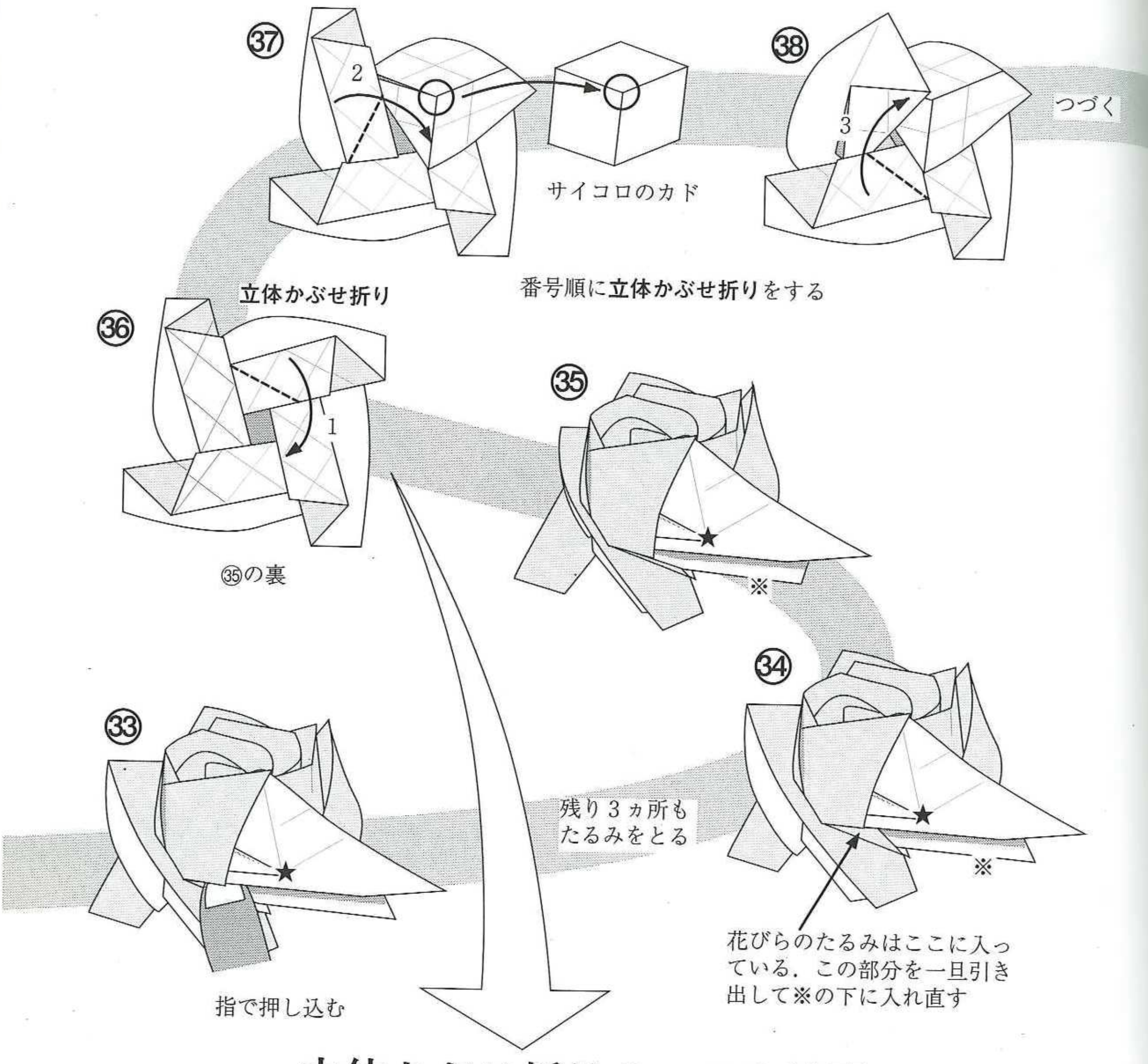
格子（折り筋）
をそろえる



サイコロのカドと同じ

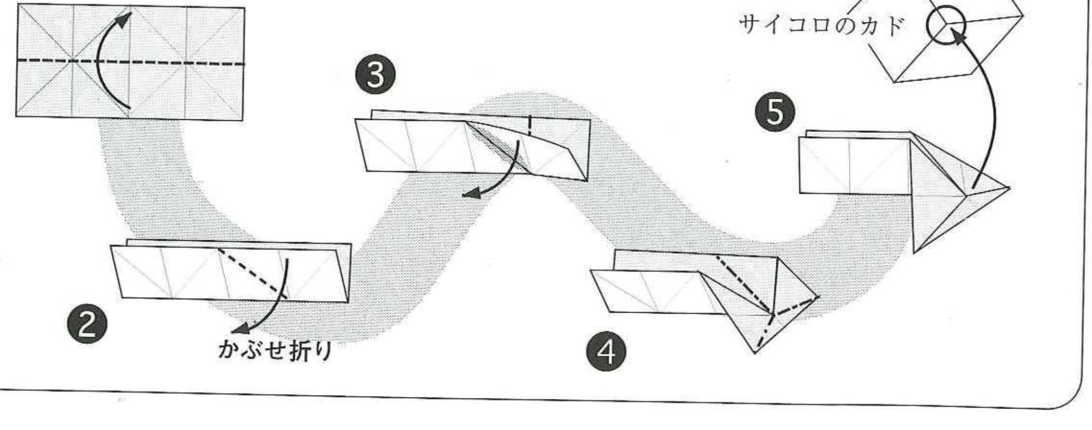


㉜の裏

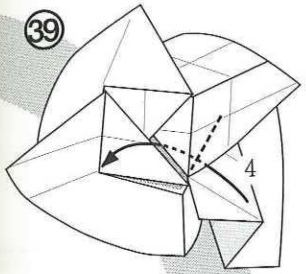


立体かぶせ折り㊱～㊵の練習

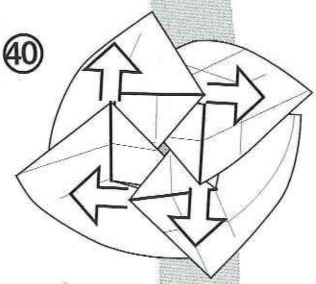
立体かぶせ折りがわからない時は
❶～❺で練習してください



㊴

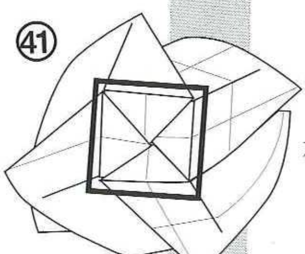


㊵



矢印方向に強くひっぱりながら，
太線を直角に**山折り**して，花の底
を正方形にまとめる

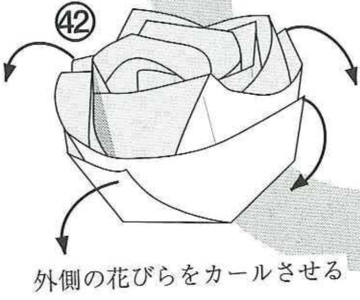
㊶



花の底が正方形

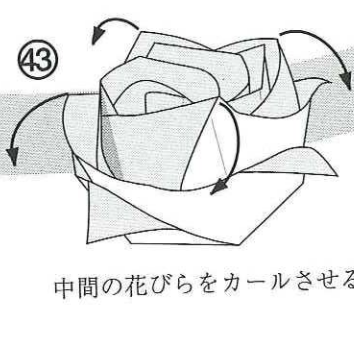
裏返す

㊷



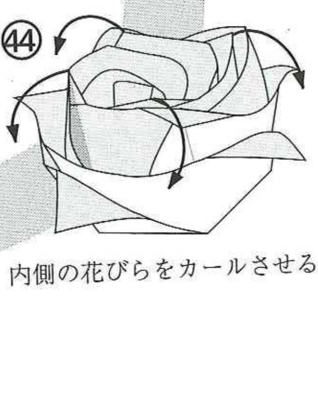
外側の花びらをカールさせる

㊸



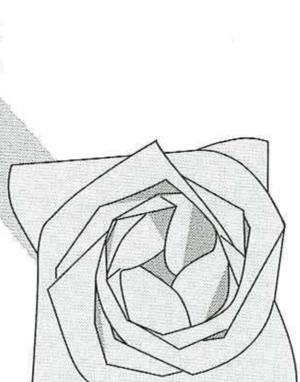
中間の花びらをカールさせる

㊹

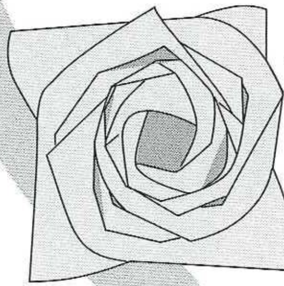


内側の花びらをカールさせる

㊺

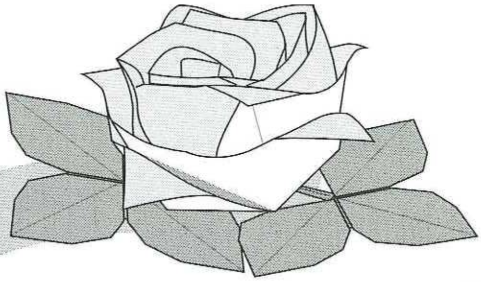


㊹をま上からみたもの



バラのつぼみ⑲と同じ
ように中心をまとめる

やっと **完成** お疲れさま



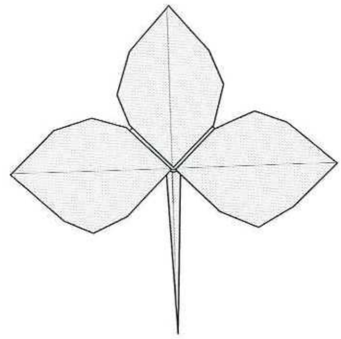
花の底のすき間に**バラの葉**（１１６ページ）
の茎を差し込む

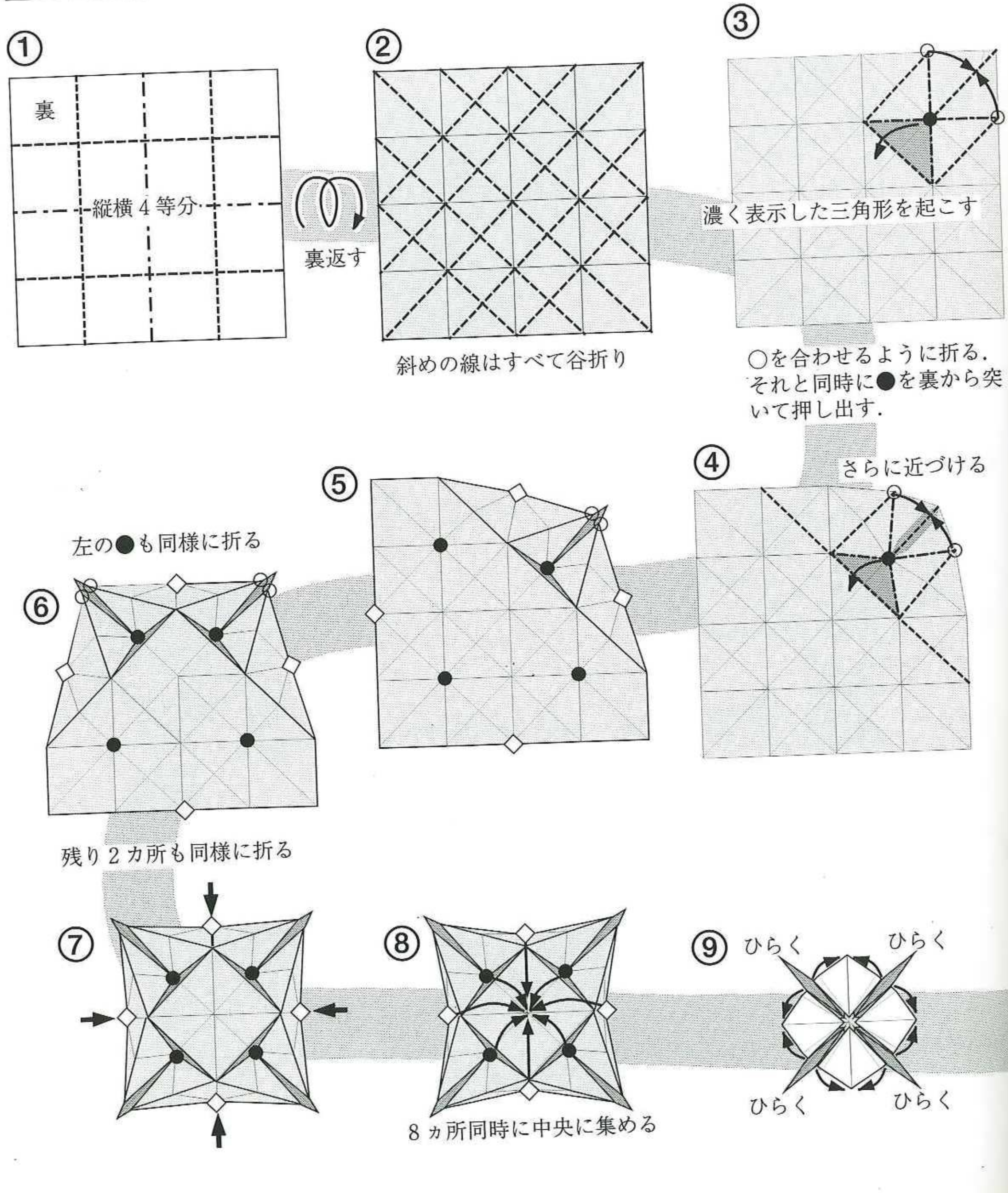
4つ葉 (P2)

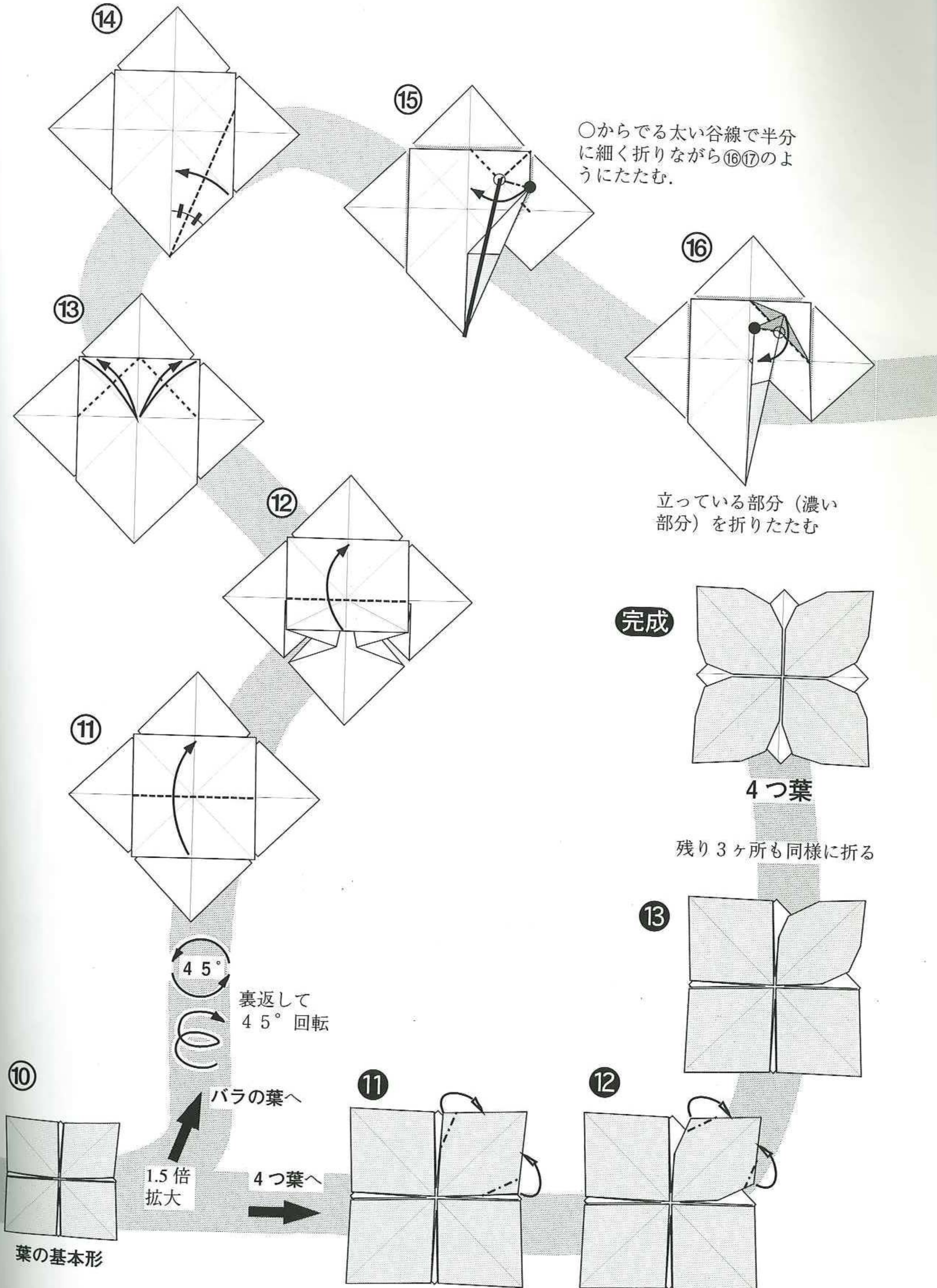
用紙の4つのカドが葉になります．あらかじめ折り目をつけてから一気に折りたたみます．

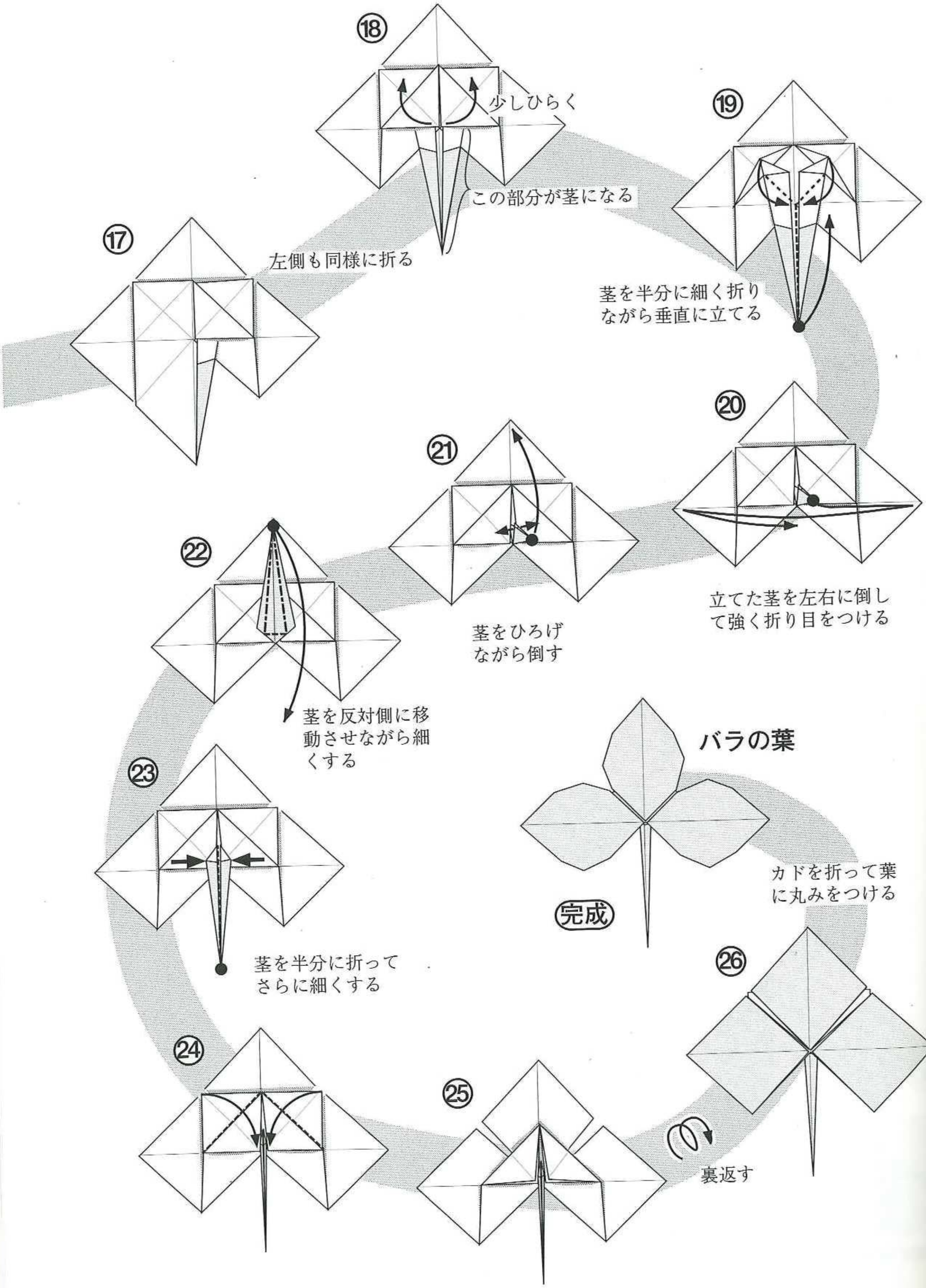
バラの葉 (P2)

4つ葉の1枚を細く折って茎にして3つ葉にします．バラの花の底にあるすきまに茎を差しこんでください．



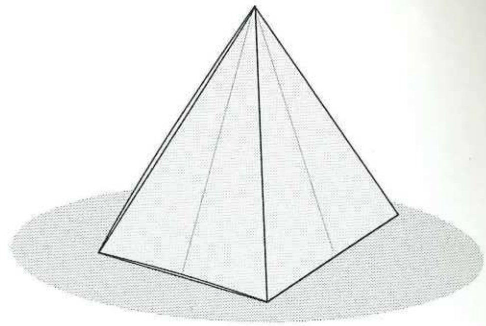


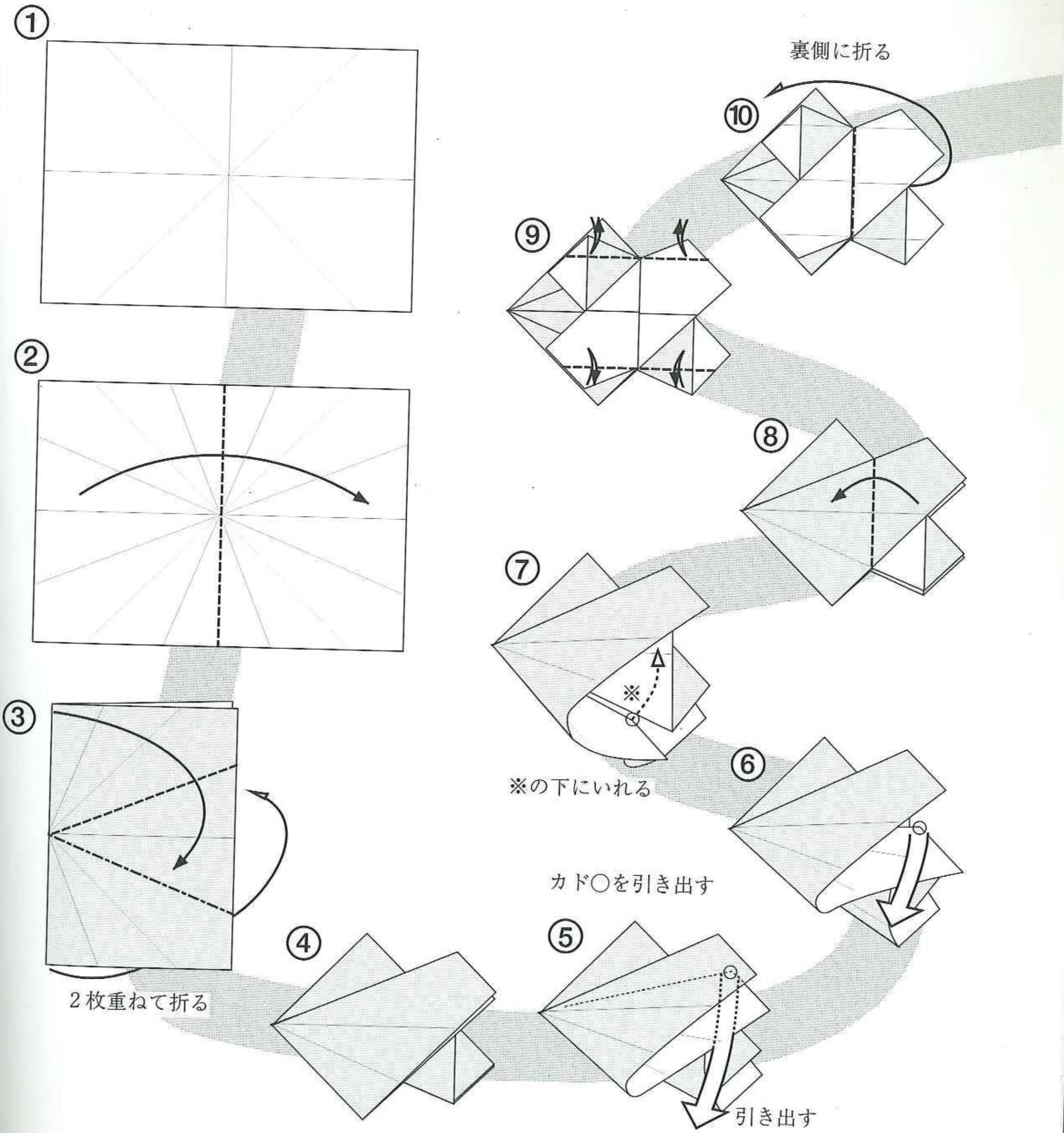

⑭
⑮
○からでる太い谷線で半分
に細く折りながら⑯⑰のよ
うにたたむ.
⑯
⑬
立っている部分（濃い
部分）を折りたたむ
⑫
完成
4つ葉
⑪
残り3ヶ所も同様に折る
⓭
4 5°
裏返して
4 5° 回転
⑩
バラの葉へ
⓫
⓬
1.5 倍
拡大
4つ葉へ
葉の基本形

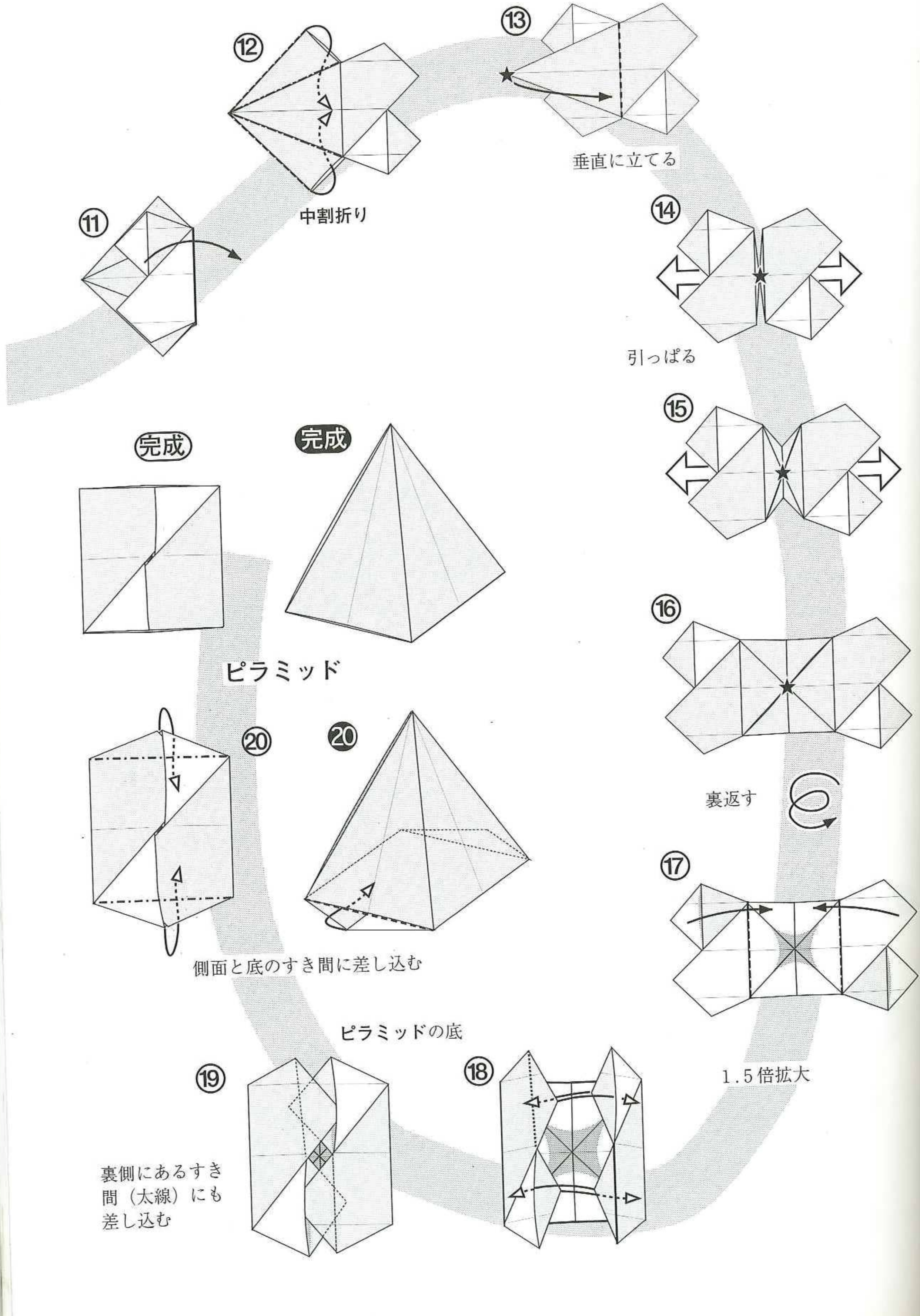

⑰
左側も同様に折る
⑱
少しひらく
この部分が茎になる
⑲
茎を半分に細く折りながら垂直に立てる
⑳
立てた茎を左右に倒して強く折り目をつける
㉑
茎をひろげながら倒す
㉒
茎を反対側に移動させながら細くする
㉓
茎を半分に折ってさらに細くする
㉔
㉕
裏返す
㉖
カドを折って葉に丸みをつける
バラの葉
完成

ピラミッド (1：√2の比の長方形用紙)

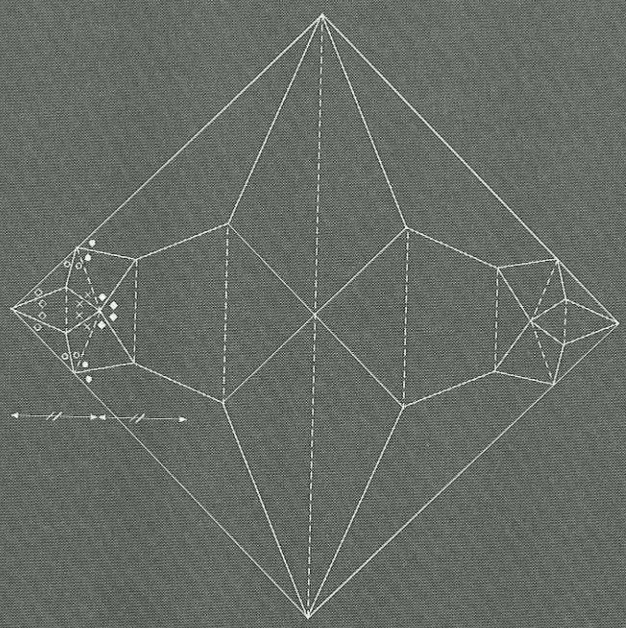
ローマにある縦長のピラミッドをイメージしてまとめました．ヨーロッパにはこのようなピラミッドがたくさんあります．アメリカの１ドル札にデザインされたピラミッドもこの形です．
ノートなど普通の長方形用紙で折ります．透明なアセテートフィルムで折るとケースとして使えます．ＯＨＰシートでも折れますが厚いので指先に力を込めて何度も折ってください．






⑪
⑫
中割折り
⑬
垂直に立てる
⑭
引っぱる
⑮
⑯
裏返す
⑰
1.5倍拡大
⑱
⑲
裏側にあるすき
間（太線）にも
差し込む
ピラミッドの底
⑳
側面と底のすき間に差し込む
⑳
ピラミッド
完成
完成

第Ⅲ部　折り紙の幾何学



はじめに
平坦条件
山折り線と谷折り線
折り鶴の幾何学

第１章　はじめに

１．１　折り紙の科学国際会議

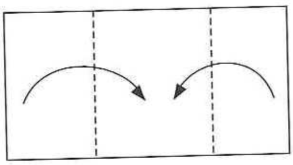
折り紙の科学国際会議というものがこれまでに２度開催されています．第１回は１９８９年１２月北イタリアのフェラーラ市で行われました．ガリレオが教鞭をとっていたことで知られるパドヴァ大学の藤田文章先生が単独で企画運営されました．発表の内容は会議論文集“ORIGAMI SCIENCE and TECHNOLOGY”（文献［Huzi］）にまとめられています．この論文集は変形Ｂ５判３９２ページの分厚いもので，折り紙と関係ありそうな数学や工学の研究が，会議以外のものも含め数多く掲載されています．第２回は１９９４年１１月に大津市で開催されました．第１回が数学と工学だけであったのに対し，対象を形の科学，教育，芸術，歴史などにもひろげました．発表内容はＢ５判５５５ページの論文集“ORIGAMI SCIENCE & ART”（文献［Mi］）にまとめられています．

ここでは，このように国際的な交流がなされるまでに発展しながらも，一般には余り知られていない**折り紙の幾何学**の基礎とその応用（**折り鶴の幾何**）を紹介していきます．

１．２　展開図

折り紙の幾何学は折り紙に潜む数学的な性質を研究するものです．しかし折ったもの自体を研究するのは非常に難しいことです．

例1.1　図１(1)は**観音折り**という折り方を表したものです．折り線図は１つですが，２通りの折り方（(2)(3)）があります．普通の折り紙では紙を何度も折るので，このような場合の数は急激に増加して，折りたたみ方をすべて把握することが困難になります．


(1)

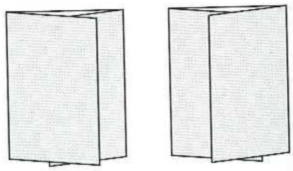
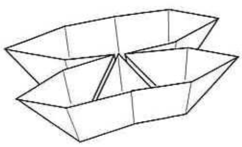

(2)　(3)

図１

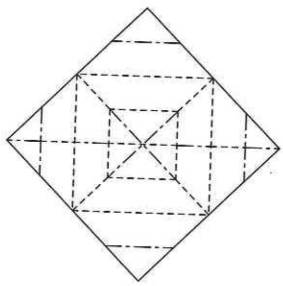
そこで折った作品そのものではなく，開いたときについている折り線を研究の対象とします．

図2は二双舟とその**展開図**（折り線図）です．破線は**谷折り線**，一点鎖線は**山折り線**を表します．折る過程で現れていても完成したときひらかれている折り目は展開図では除きます．二双舟くらい簡単なものでも破線と一点鎖線が区別しにくいので，本書では支障がない限り山折り線を実線で表すことにします．

一般に展開図から完成形をイメージするのは困難ですが，おおまかな構造は読みとれます．図2(2)は前後，左右に対称です．この対称性は二双舟の持つ対称性を反映しています．図3は良く知られている折り紙の展開図です．もとになる折り紙が何か考えてみてください．折り線が集中しているコーナーは折ったとき細くなることがヒントです．答えは第4章第1節です．



(1)



(2)

図2

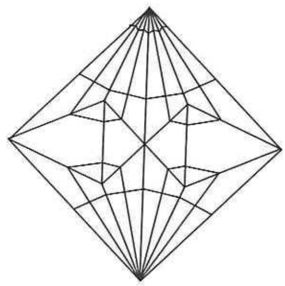
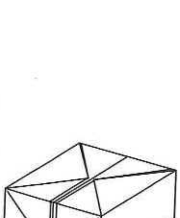
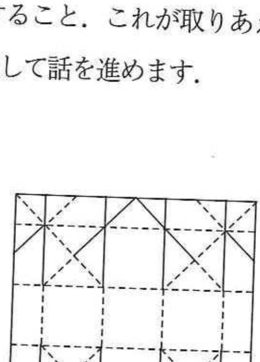


図3

図4(1)は風船に折り目をきちんとつけてできる立方体で，(2)は展開図ですが，1つ問題があります．二双舟の場合と違って，立方体の辺となる折り目が半開きの状態になっています．折り紙作家笠原邦彦氏はこれを**半開折り**と名づけました．展開図で半開折りを表現するには折る角度を書き添えねばなりません．山折りと谷折りを区別するだけですむ平坦な折り紙に比べると複雑です．図5は曲線に沿って紙を折ったものです．折り線が曲がっているだけでなく，折り目を挟む曲面のなす角度が場所によって異なります．半開折りよりさらに複雑です．このような状況にどう対処すればよいでしょうか？　難しい問題は先送りすること．これが取りあえずの対処法です．そういう訳で本書では紙をぺたんと平坦に折る場合に限定して話を進めます．



(1)



(2)

図4

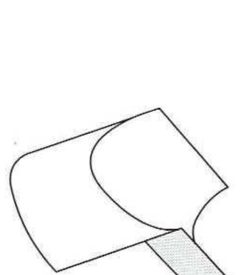


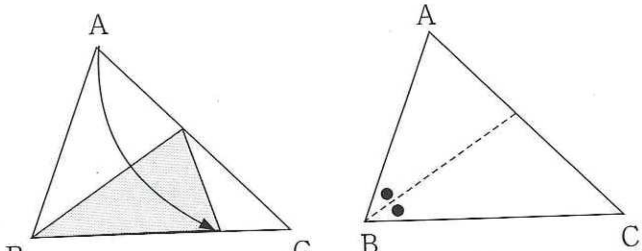
図5

第2章　平坦条件

2．1　角二等分折りと三角形の内心

辺ＡＢを辺ＢＣに重ねるように三角形ＡＢＣを折ります（図6(1)）．(2)はひろげたものですが，折ったとき重なる部分のなす角の大きさは等しいので，折り線は角Ｂの二等分線になります．これを山折りの場合も含めて**角二等分折り**とよぶことにします．

つぎに3つの角で同時に角二等分谷折りすることを考えます．図7のように3つの谷折り線は1点で出会いますが，この点は角二等分線の交点なので三角形の**内心**です．さらに図7を平坦に折りたたもうとすると，新たに山折り線が1つついて図8のようになります．図9はその展開図です．角二等分折りは技術的には辺を重ねる折りたたみなので，図8において3辺ＡＢ，ＣＤ，ＡＤは辺ＢＣ上に重なっています．その結果辺ＡＤと辺ＣＤは重なります．これは展開図9において山折り線ＩＤが辺ＡＣに下ろした垂線であることを意味します．内心Ｉから辺に下ろす垂線はＩＤ以外に2つありますが，ＩＤの代わりにこれらを山折りしても平坦に折りたたむことができます．折ってみると，3垂線がちょうつがいの役割をしていることがわかります（図１０）．



(1)　(2)

図6

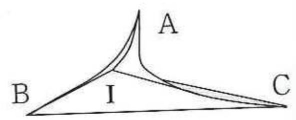


図7

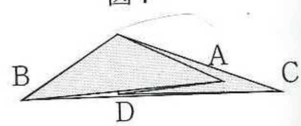


図8

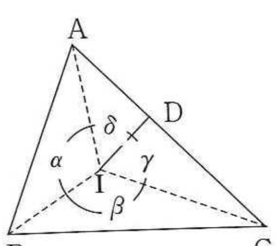


図9

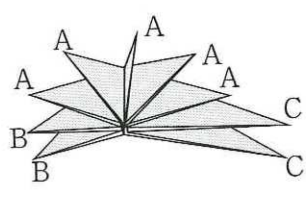


図１０

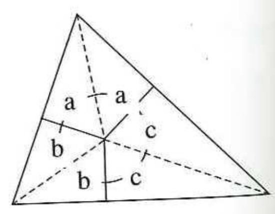


図１１

2．2　伏見の定理

図１１は図9に2垂線を書き加えたものですが，破線を挟む三角形は合同なので，同じ大きさの中心角が3組できます．これを図9と比較すると，**伏見の定理**とよばれている重要な関係式

（i）　$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$

が得られます．

紙をくしゃくしゃに丸めて強く押しつぶしからひろげると，不規則な線からなる展開図が得られます．４本の折り線が出ている点に分度器をあてて角度を計ると，紙の厚みのせいで誤差はありますが，折り線のなす角のひとつおきの和がほぼ１８０°になっています．

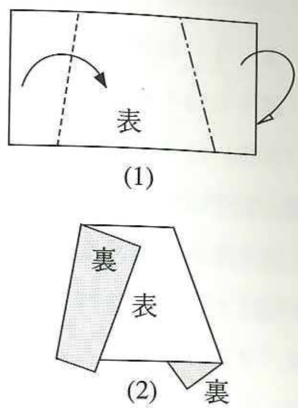


図１２

２．３　局所平坦条件

折り線が５本以上の場合を考えてみましょう．伏見の定理同様に明快な結果が得られます．

基本定理１　１点から放射状に延びる折り線で紙が平坦に折りたためるとき，

（ｉ）折り線の数は４以上の偶数，

（ⅱ）折り線のなす角のひとつおきの和は１８０°．

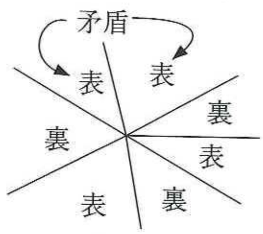


図１３

（ｉ)の証明　山折り谷折りに関係なく折り線をはさんだ面の表裏は折ると逆になります（図１２）．折り線が奇数あると仮定すると，展開図の面に表と裏を交互に書き込んだとき，図１３のように折り線を挟む面の表裏が同じになるところができて矛盾が生じます．したがって折り線は偶数でなければなりません．

（ⅱ)の証明　折り線が６本の場合で説明します（図１４(1)）．(2)は折ったものです．この上を弧に沿って蟻が歩くことを考えます．点Ｏを原点とした円周に沿った座標で蟻の位置を表すと，点Ａにおいてａ，点Ｂにおいてａ－ｂ，…，一周して点Ｏに戻ったときａ－ｂ＋ｃ－ｄ＋ｅ－ｆとなります．この値は原点Ｏの座標なので，ａ－ｂ＋ｃ－ｄ＋ｅ－ｆ＝０つまりａ＋ｃ＋ｅ＝ｂ＋ｄ＋ｆとなります．弧の長さは中心角の大きさに比例するので，ひとつおきの中心角の大きさの和は等しくなります．中心角の合計は３６０°なので，それぞれが半分の１８０°です．折り線が多くても同様に証明できます．証明終．

基本定理１の条件(ⅱ)を**局所平坦条件**とよびます．

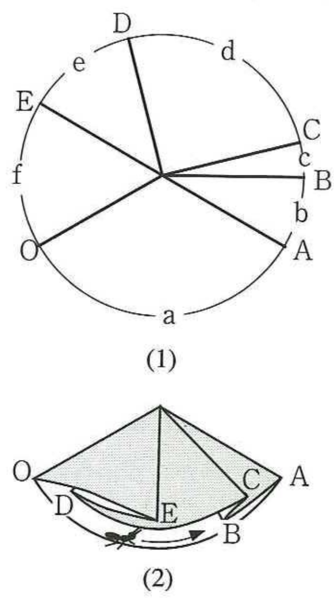


図１４

第３章　山折り線と谷折り線

３．１　山折りと谷折り

図１５はそれぞれ**谷折り**と**山折り**です．谷折り線（谷線）は破線，山折り線（山線）は一点鎖線（複雑な図では実線）で表します．

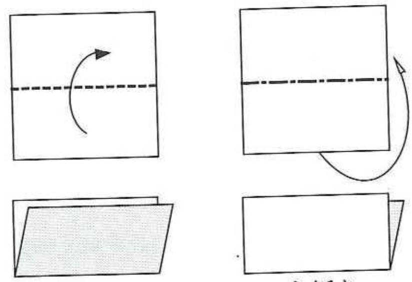


図１５

図１６の展開図は図１７のようになります．山谷が違うだけで，線のつながり方やなす角度は同じです．そこで展開図の山谷を区別せずにすべて実線で表したものを**形式的折り線図**とよぶことにします．なお展開図と無関係に，平面を線分，半直線，直線で分割したものは**胞体分割**とよばれます．基本定理１より，

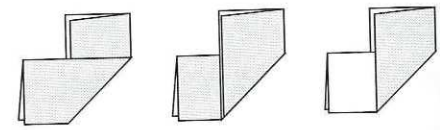


図１６

（ｉ）形式的折り線図

⇨頂点毎に局所平坦条件を満たす胞体分割．

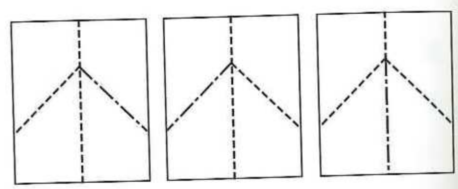


図１７

３．２　実山谷系

図１８は形式的折り線図です．４つの線に形式的に山谷を与える方法は$2^4=16$通りありますが，実際に折りたためるのは４つだけです（図１９）．


図１８

定義３.１　形式的折り線図Kの線に，実際の折りたたみと関係なく与えた山谷を**形式的山谷系**といい，$C(K)$で表す．形式的山谷系の中で実際に折りたためるものを，Kの**実山谷系**という．

ｎ本の線からなる形式的折り線図の形式的山谷系は2^n通りあります．第３章の主題はこれら形式的山谷系の中から実山谷系を選別する事です．簡単なものならば，形式的折り線図が実山谷系を持つかどうかは，実際に折ってみればわかります．しかしどうやってみても折りたためないことがあります．

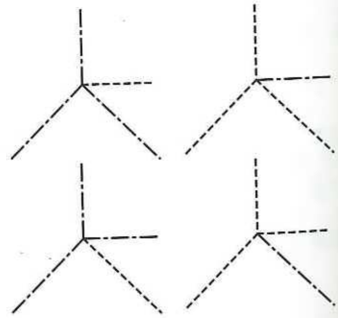


図１９

やり方が悪いのか？　それとも絶対に折りたためないのか？　図２０の形式的折り線図で試してみてください．

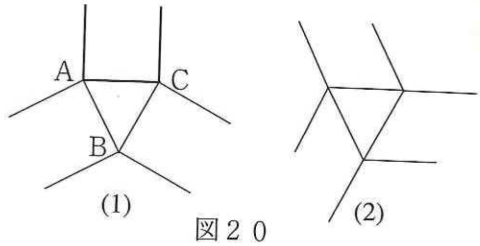


図２０

３．３　隣接山谷条件

形式的折り線図の実山谷系を一般に論ずることは究めて難しいので簡単な場合から手をつけることにします．最も簡単なのは頂点が１つ，つまり１点から放射状に延びる線からなる形式的折り線図です．形式的折り線図は平面全体の分割と考えるべきですが，わかりやすいように四角形や円形に切り取って説明します．頂点が１つの場合は頂点中心の円で切ります．

命題３.１　扇形の用紙を中心から延びる２本の線で平坦に折るとき，

（ｉ）　$\beta<\alpha$ かつ $\beta<\gamma$ ならば，２つの折り線の山谷は逆になる．

証明　２つとも谷折りしようとすると，図２１(2)のように，ぶつかって折りたためません．山折りでも同じです．したがって(3)のように一方を山折り，他方を谷折りするしかありません．証明終．条件(ｉ)を**隣接山谷条件**とよびます．

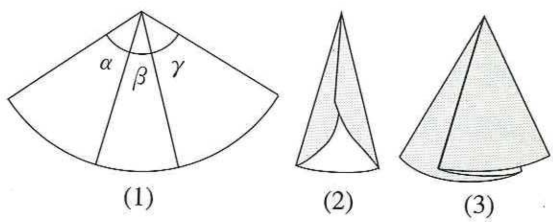


図２１

注意：(ｉ)の不等号に＝がつくと，２つの折り線の関係はなくなります．β と同じ大きさの扇形を β に折り重ねれば，残った扇形はどちら側にも折りたためるからです．

基本定理２　頂点が１つしかない形式的折り線図の実山谷系において，

（ii）　山線数と谷線数の差＝２．

証明　折りたたんだものをまっすぐ切ると，図２２(1)〜(3)のように閉じた折れ線が得られます．(1)を少しひらいてから切断すると(4)(5)のようになります．この閉じた折

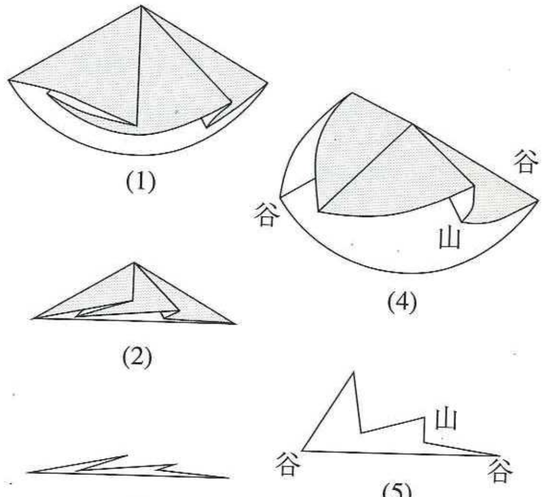


図２２

れ線（多角形）の内角の和は（折り線数－２）×１８０°であり，この値は紙のたたみ加減に影響されません．しかし個々の内角の大きさは折りたたむにしたがって変化して，山折り線では最後に３６０°，谷折り線では０°となります．これから内角の和を計算すると山線数×３６０°になるので，

山線数×３６０°＝（折り線数－２）×１８０°，

山線数＝折り線数／２－１．

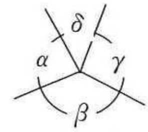
山線数＋谷線数＝折り線数，と組み合わせると，

谷線数＝山線数＋２

を得ます．紙の裏を鏡に写して見ると山谷が逆になるので，

山線数＝谷線数＋２

となり(ii)を得ます．証明終．



(1)

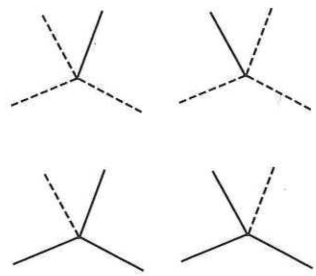

(2)

図２３

命題３.２　図２３(1)のような形式的折り線図（$\delta<\alpha\leqq\gamma<\beta$）の実山谷系は(2)の４通りしかない．

証明　命題３.１の隣接山谷条件より，大きさδの角を挟む折り線の山谷は逆です．基本定理２(ii)が成り立つには，残り２本がともに山線か谷線でなければならないので，(2)の４通りになります．証明終．

注意：命題３.２の不等式で，δとα間，γとβ間の不等号が等号になると実山谷系はもっと増えます．命題３.１の注意より，隣接折り線の山谷の制約が減るからです．命題３.２は次のように表現すると使いやすくなります．

命題３.３　命題３.２の形式的折り線図（$\delta<\alpha\leqq\gamma<\beta$）の実山谷系では，

(iii)　狭い角を挟む折り線の山谷は逆になり，

(iv)　広い角を挟む折り線の山谷は同じになる．

図２０(1)の形式的折り線図が平坦に折りたためないことが，この命題を用いて次のように説明できます．まず線分ＡＢを谷線とします．頂点Ａ，Ｂに命題３.３を適用すると線分ＡＣ，ＢＣは山線になります．続いて頂点Ｂに適用すると線分ＢＣは谷線になりますが，これはＢＣが山線であることに矛盾します．したがって平坦に折りたためません（実山谷系は存在しません）．

３．４　局所実山谷系存在定理

命題３.３や基本定理２は単純な結果ですが，山谷に関して一般に成り立つ貴重な命題です．局所構造に関する重要な命題をもう１つ説明しましょう．

基本定理３（局所実山谷系存在定理）　頂点が１つしかない形式的折り線図には実山谷系が少なくとも２つ存在する．

証明　図２４(1)の形式的折り線図で説明します．まず，どこでもいいから折り線の１つに切り込みを入れます．次に(2)の番号順に谷，山，谷，・・・と交互に折ります．切り離した所が(3)のように揃うことが局所平坦条件により保証されるので，(4)のように貼り合わすことができます．こうしてできた平坦な折りたたみがKの実山谷系を１つ与えます．山谷をすべて逆にすればもう１つの実山谷系が得られます．切り込みを入れる線の選び方によっては，折りたたんだとき(6)のように面ｅと面ｓの間に他の部分が割り込んで，うまく貼り合わせられないこともあります．こういう場合は(6)で端にくる折り目に切り込みを入れてやり直します．証明終．

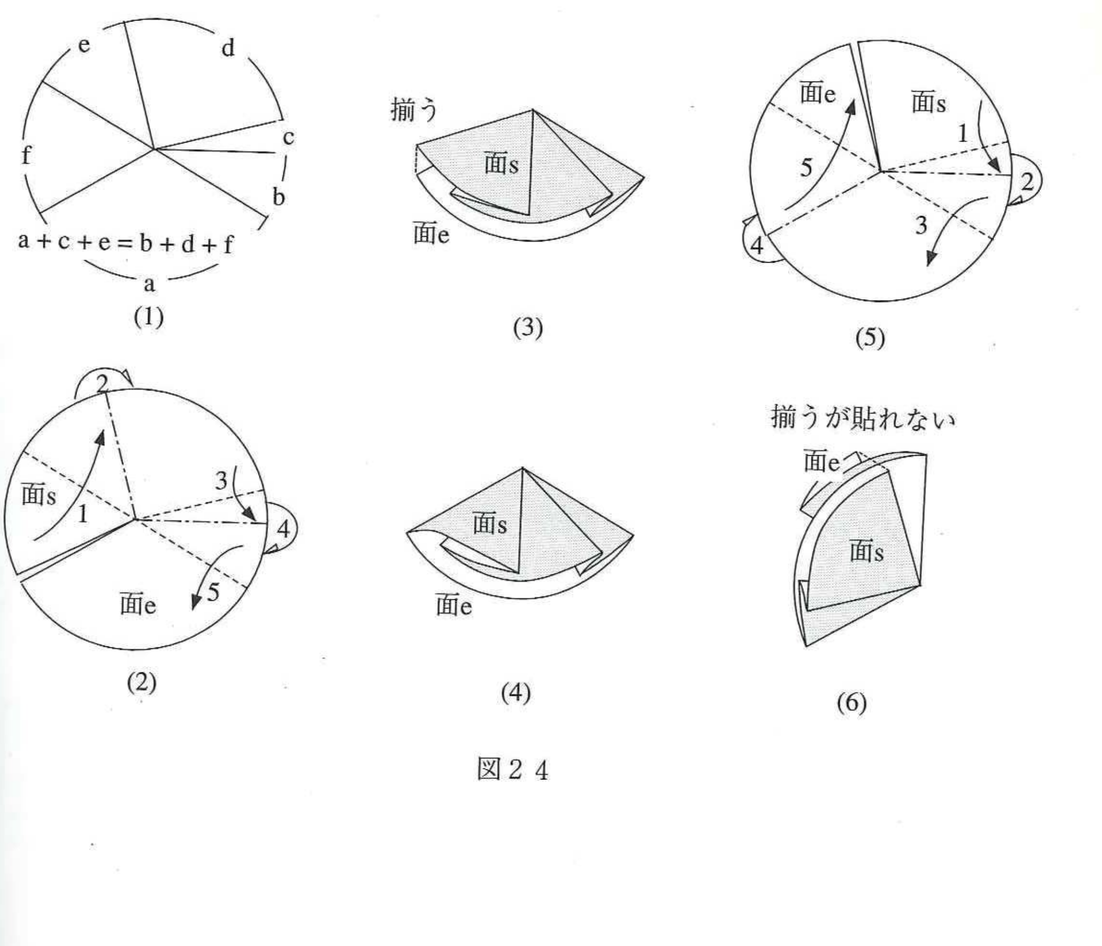


図２４

3．5　頂点が２つの場合

形式的折り線図２５の実山谷系を調べましょう．σ，τ，ρの３面に着目します．図２６(1)(2)はこの３面を切り取ったものです．(1)ではσとρを手前奥どちら側にも自由に折ることができます．一方(2)では，(4)のようにσとρは反対側に折らなければなりません．つまり，

(ｉ)　２つの折り線の山谷は逆．

これは命題3.1(ｉ)と同じ状況です．同じ形式的折り線図から作られた(1)と(2)の違いはどこからくるのでしょうか．形式的折り線図は本来平面全体で考えるべきものです．平面の一部を切り取ることは便宜的な措置に過ぎません．本質に近いのは広い方の(2)です．(1)に制約(ｉ)がつかなかったのは切り取る範囲が狭くて面σ，ρがたまたまぶつからなかったためです．

図２７(1)は図２６(1)の面τの幅を狭くしたものです．面σと面ρを同じ側に折るには(2)のように紙を破らなければならないので，制約(ｉ)がつきます．これは次のように解釈できます．図２７(1)は図２６(2)を遠くから見たものと考えるのです．２つは同じものだから制約(ｉ)がつくのは当然という訳です．

図２８(1)(2)(3)の形式的折り線図では，山折り谷折りに関係なく折ると２面σ，ρは影部分に移ります．(1)(2)は(4)(5)のように折った所が重なるので同じ側に折ることができません．しかし(3)は，(6)のように重ならないので山谷自由に折れます．なぜ(3)だけが他と違っているのでしょうか．

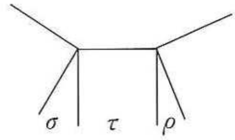


図２５

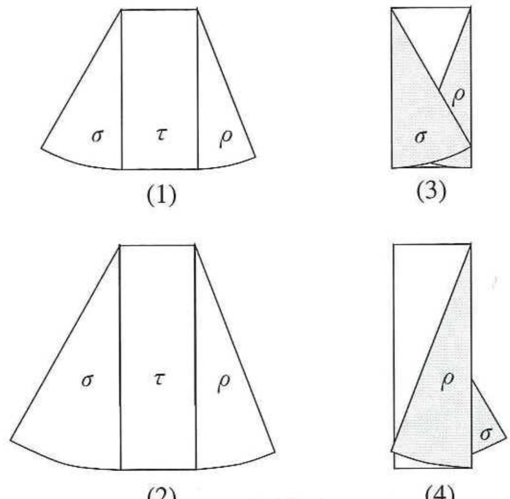


図２６

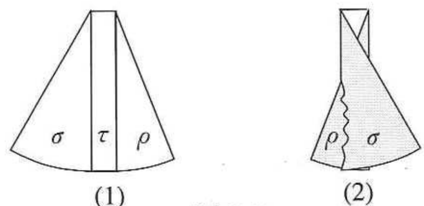


図２７

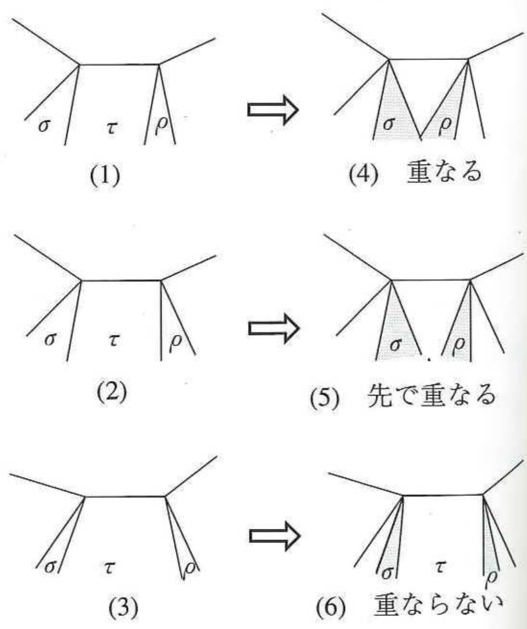


図２８

図２８(3)を遠くから眺めると図２９のようになります．巨視的には，図２９(3)のような頂点数１の形式的折り線図と同じなのです．図２９(3)の錐面τの中心角＝（(1)の面τの２内角の和－１８０°）なのでこの角度が隣接錐面σ，ρの中心角より小さいと，命題３.１より制約(ｉ)がつきます．そこで，

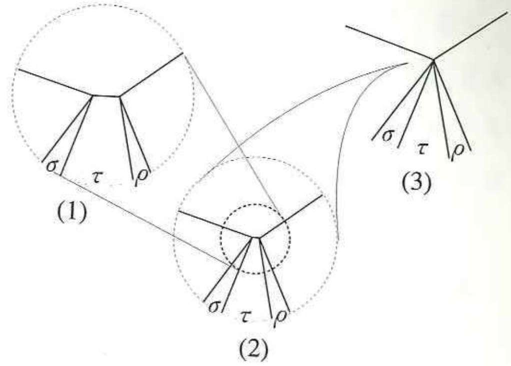


図２９

定義３.２　Ｋを図３０(1)のような２つの頂点（ＡとＢ）を持つ形式的折り線図とする．このとき頂点Ａを共有する辺で定まる胞体分割(2)を**Ａに関するＫの局所化**といいK_Aで表す．また線分ＡＢを１点につめたものを**ＫのＡＢ圧縮**といい**Ｋ/ＡＢ**で表す．

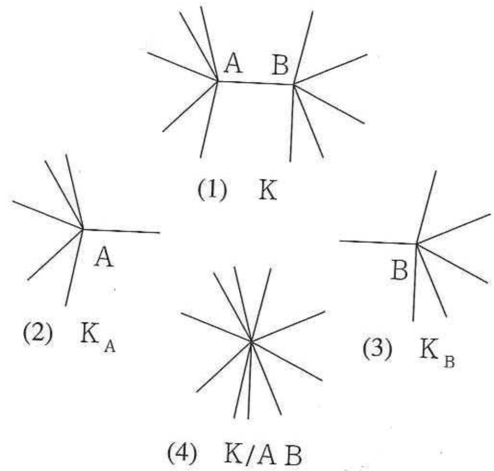


図３０

命題３.４　Ｋを定義３.３の形式的折り線図とする．このときK_A，K_B，Ｋ/ＡＢは形式的折り線図である．

証明　局所化K_A，K_Bが形式的折り線図になることは明らかです．図３１(1)のように折り線のなす角度を表すと，圧縮Ｋ/ＡＢの角λ，μはそれぞれ

$\lambda=\alpha_1+\beta_1-180$，$\mu=\alpha_m+\beta_n-180$

となり，

Ｋ/ＡＢにおける角のひとつおきの和

$=\lambda+\alpha_3+\cdots+\alpha_{m-1}+\beta_{n-1}+\cdots+\beta_3$

$=\alpha_1+\beta_1-180+\alpha_3+\cdots+\alpha_{m-1}+\beta_{n-1}+\cdots+\beta_3$

$=(\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_{m-1})+(\beta_{n-1}+\cdots+\beta_3+\beta_1)-180$

$=180$

を得ます．このように局所平坦条件が成り立つので圧縮Ｋ/ＡＢは形式的折り線図です．

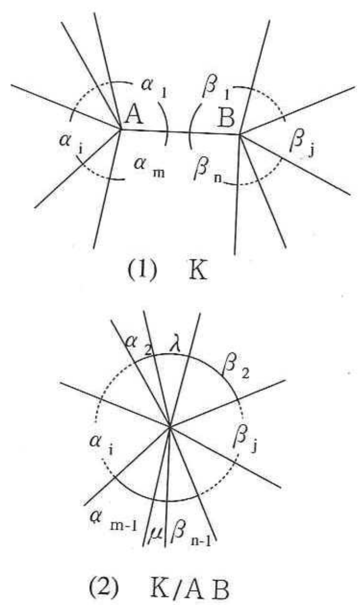
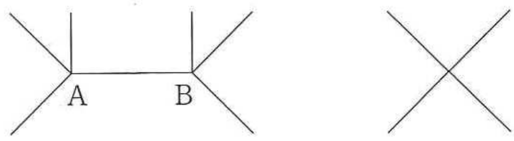


図３１

注意：$\lambda=0$または$\mu=0$の場合にはＡＢ圧縮により線が重なります．このような場合には，図３２のように重なった線は消します．



(1)　A　　(2)　K/ＡＢ

図３２

定義３.３　定義３.２の形式的折り線図Ｋとその形式的山谷系C(Ｋ)に対して，C(Ｋ)の山谷にしたがってK_{A}，Ｋ/ＡＢに山谷をつけたものをそれぞれ **Ａに関するC(Ｋ)の局所化**，**C(Ｋ)のＡＢ圧縮**といい，$C(\mathrm{K})_{\mathrm{A}}$，$C$(Ｋ)/ＡＢ で表す．

基本定理４　Ｋを定義３.２の形式的折り線図とする．このとき次が成り立つ．

Ｋの形式的山谷系C(Ｋ)が実山谷系

⇔　$C(\mathrm{K})_{\mathrm{A}}$，$C(\mathrm{K})_{\mathrm{B}}$，$C$(Ｋ)/ＡＢがそれぞれ$\mathrm{K}_{\mathrm{A}}$，$\mathrm{K}_{\mathrm{B}}$，Ｋ/ＡＢの実山谷系

（⇨）の証明　C(Ｋ)にしたがってＫを折ったものから頂点Ａの近くを切り取ったものはK_{A}の折りたたみになっていて，その山谷はC(Ｋ)と同じなので，$C(\mathrm{K})_{\mathrm{A}}$は$\mathrm{K}_{\mathrm{A}}$の実山谷系になります（図３３(1)~(5)）．$C(\mathrm{K})_{\mathrm{B}}$も同様です．

(6)の帯状領域の幅を少しずつ狭めて最終的に完全に切りつめることを考えます．これは図２９のように(1)を遠くから眺めることに相当します．無限遠から見ると２点Ａ，Ｂは重なって(8)のように見えます．これはＫ/ＡＢの折りたたみです．折り線の山谷は(1)と(8)で全く同じなのでC(Ｋ)/ＡＢはＫ/ＡＢの実山谷系となります．なお(7)(9)は(6)(8)の展開図です．

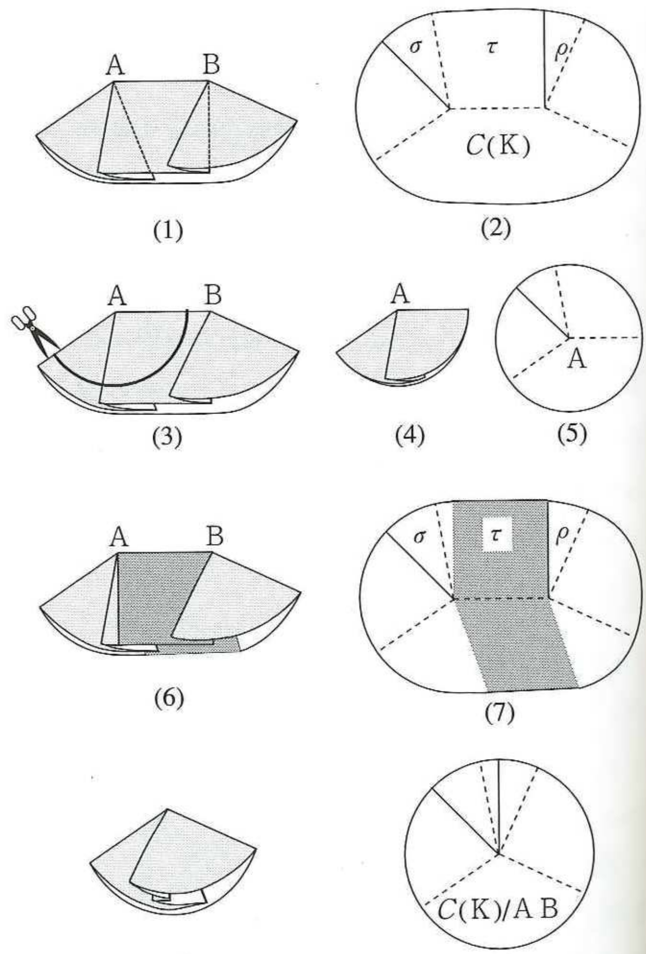


図３３

面τを挟む折り線が平行な場合は，圧縮は図３４のように面τ全体の切り詰めになります．(2)では面σと面ρが合わさって１つの面になり，命題３．４注意の折り線の消滅と整合します．

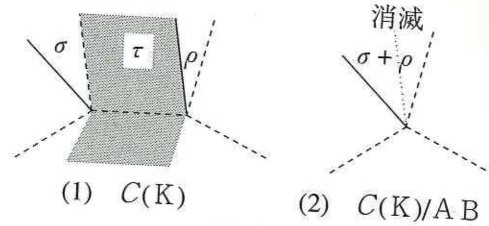


図３４

（⇦）の証明　C(K)を２つ用意して，図３５(1)の太線で切って(3)と(4)を作ります．C(K)$_A$，C(K)$_B$がそれぞれK$_A$，K$_B$の実山谷系であるという仮定より(3)(4)は折りたたむことができるので，これらを(1)の影部分が重なるように貼り合わせるとC(K)の折りたたみが得られます．証明終．

注意：C(K)/A BがK/A Bの実山谷系であるという仮定は（⇦）の証明で使われていないように見えます．しかしこの条件がないと貼り合わせるときに次のような不都合が生じます．

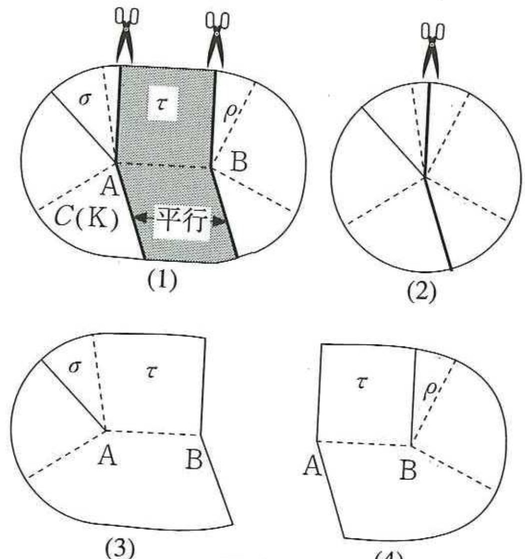


図３５

例３．１　図３６(1)の形式的山谷系C(K)に対して局所化K$_A$，K$_B$は実山谷系ですが(2)の圧縮C(K)/A B は実山谷系ではありません．何故なら図３３と同じ作業で得た局所化の折りたたみ(3)(4)は，影の部分を重ねて貼り合わせようとすると※印部分がぶつかってうまくいかないからです．このぶつかりは２点A，Bが近いほど頂点近くで起こるので，２点が重なり１点になったK/A Bでうまく折りたためればその他の場合はうまくいきます．ちなみに(2)を２つに分けて折った(5)は，(6)のよう貼り合わせることができません．

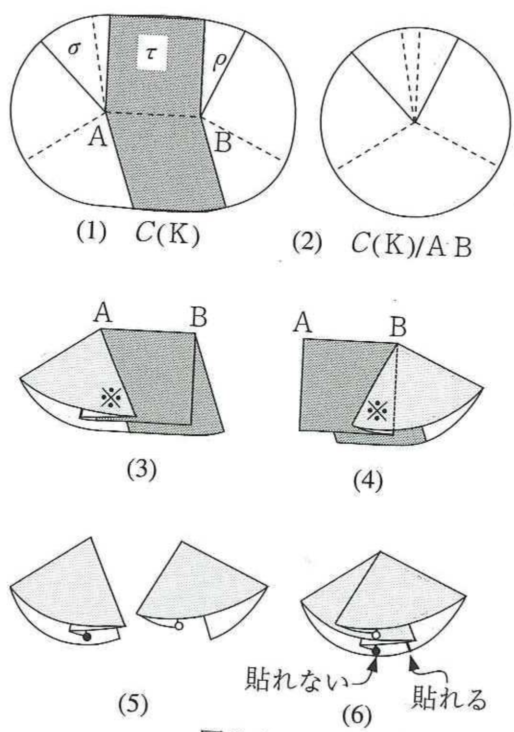


図３６

3．6　山谷の基底

基本定理４は図３７(1)のような３頂点の場合にも適用できます．(3)のような局所化K_{AB}とK_Cおよび(4)の圧縮K/ＢＣを考えることで，頂点数２以下の場合に帰着できるからです．これに対して(2)は，圧縮すると線がすべて消滅するので基本定理４は使えません．(2)の山谷については実際に手で折って調べるしかないのでしょうか．(2)が実山谷系を持たないことは，３節で３つの折り線ＡＢ，ＢＣ，ＣＡの山谷が互いに影響し合っていること（命題3.3）を利用して証明しました．そこで，

定義3.4　形式的折り線図Kにおいて，折り線ℓに山谷を与えたとき，命題3.3により一意に山谷が定まる折り線の列を［ℓ］で表し，ℓに属するKの（山谷の）基底という．

例3.2　図３８(1)の形式的折り線図の基底は(2)の［ℓ］，[m] で，その山谷はそれぞれ(3)の２通りあります．図３９(1)は図３８(1)の実山谷系のひとつで，折ると(2)になります．これを(2)～(6)のように折りかえると(7)の実山谷系を得るので，この変形が基底［ℓ］の山谷を逆にする操作に対応することがわかります．

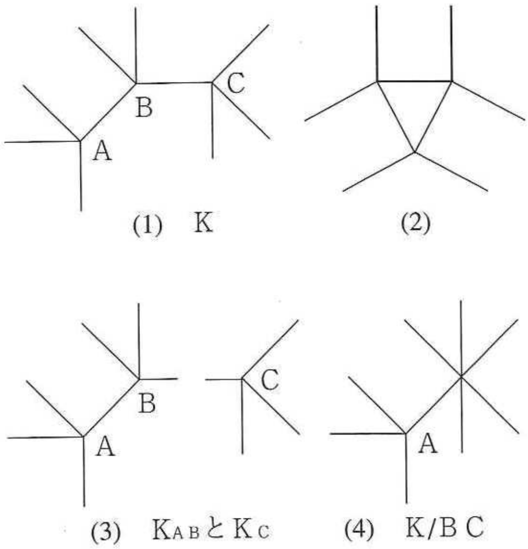


図３７

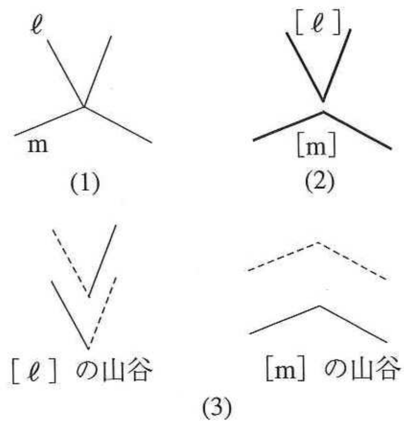


図３８

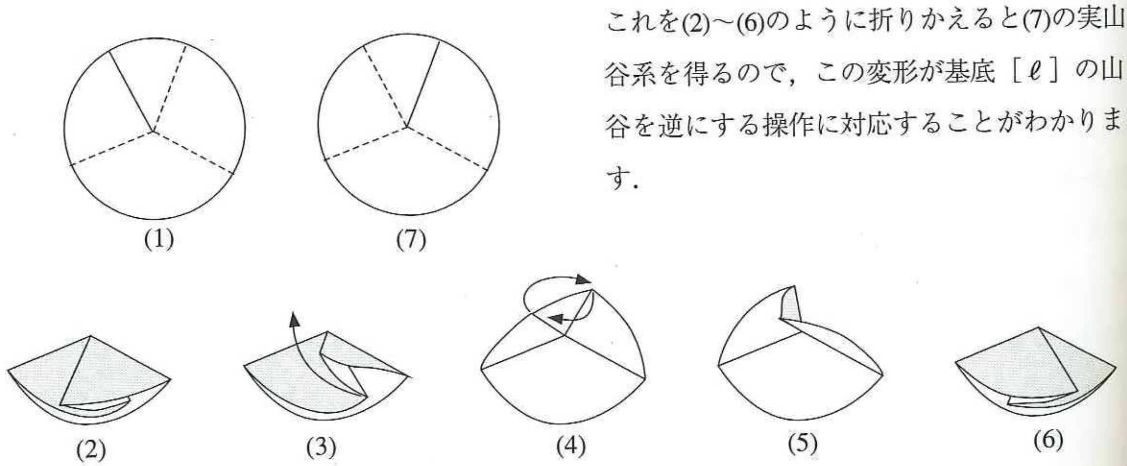


図３９

例３.３　図４０(1)(2)は形式的折り線図とその実山谷系で，折ると(3)のようになります（文献［F］，［Mo］）．これは**ねじり折り**とよばれています．(1)の基底は(4)のように４つありますが，太線で示した基底の山谷を(2)の逆にした(5)を折ると(6)になり，この山谷の変更がポケットの裏返し（(3)※印の折り変え）に相当することがわかります．

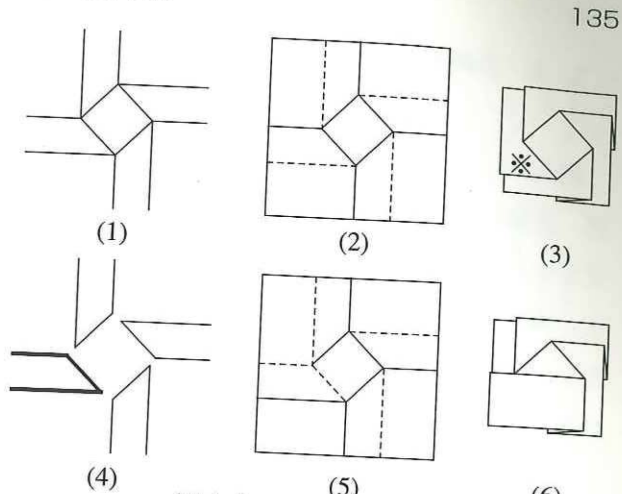


図４０

３．７　基底の役割

基底は局所的な山谷の構造を結ぶ重要な概念です．

例３.４　図４１は計算機を使って規則性のある形式的折り線図を探したときに見つかったものです．(1)の太線は閉じた基底ですが(2)のように矛盾を含むので実山谷系は存在しません．つまりどのように山谷をつけても平坦に折りたためません．

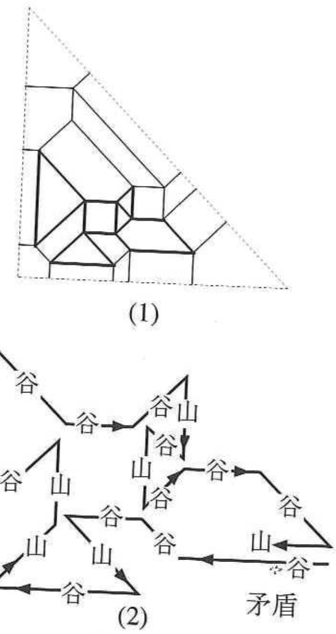


図４１

例３.５　図４２(1)の形式的折り線図の基底は等脚台形Ｓ，Ｔ（太線）などの周です．これらを［Ｓ］，［Ｔ］と表します．この基底の山谷には(2)の２種類あります．実際に折ってみるとわかりますが，この２種類をどう配置しても実山谷系になります．つまり基底は独立しています．

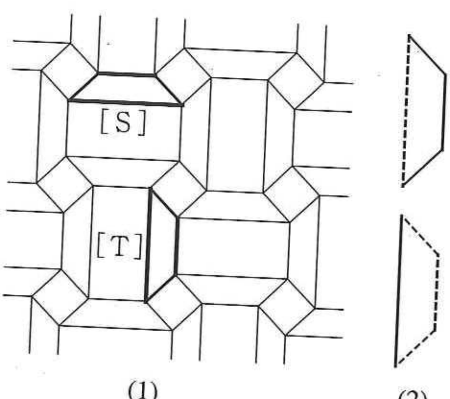


図４２

この例のような規則的な折り線構造を持つものは**平織り**とよばれていますが，数学的には２次元結晶群の作用で不変な折り紙と表現できるので，私は立体的なものを含めて**結晶折り紙**とよんでいます．図４３(2)は**レンガ折り**という良く知られた平織りで，(1)は展開図です．図４４も平織りで基底はすべて平行四辺形です．平織りの詳細は文献［F］をご覧ください．

3. 8　基底の取り扱いの難しさ

例3.6　図45(1)は図42(1)の一部，正確にいうと台形Tに関する局所化です．基底は(2)のように5つあります．例3.5では基底は独立していましたが，図45(2)の基底［ℓ］，[m］は独立していません．基本定理4よりℓとmの山谷が逆でなければならないからです．

面τの形式的な中心角を，命題3.4の角λのように圧縮を用いて定義すると0になりますが，このような角を含めて命題3.3が成り立つことが証明できます．拡張された命題3.3で基底を定義し直すと，［ℓ］と［m］がひとつながりになり，(3)のような大きな基底ができます．こうして(1)の実山谷系は(4)(5)とその逆の4通りだけであることがわかります．

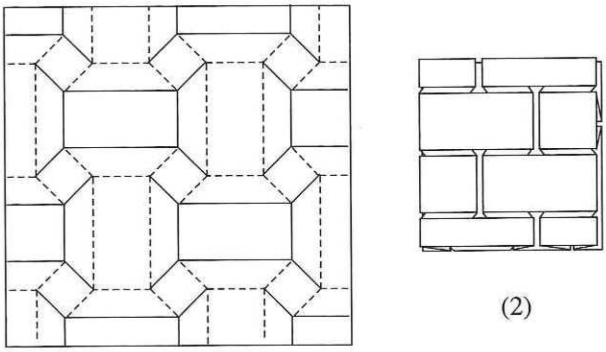

(1)　(2)

図43

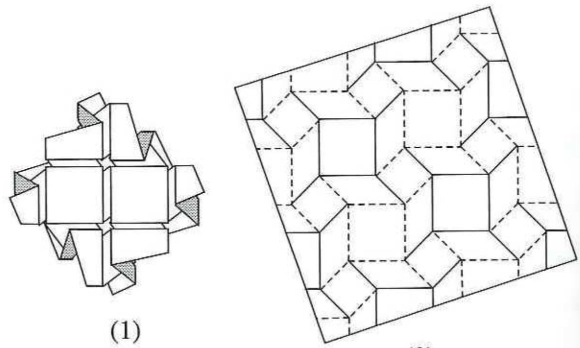
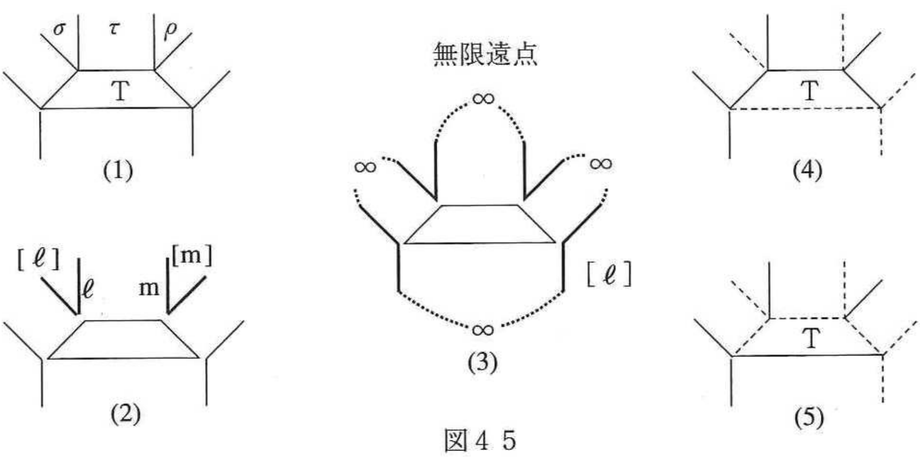

(1)　(2)

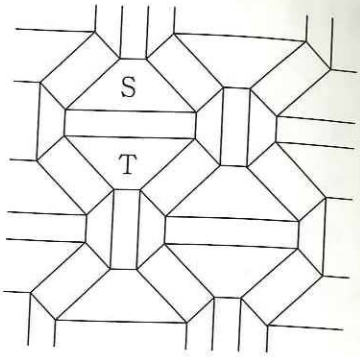
図44



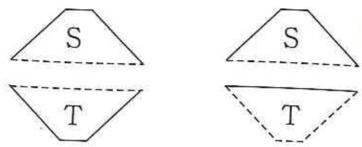
(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

図45

例3.7　図４６(1)は図４２(1)の線の長さを変えたものです．基底［S］,［T］の山谷を(2)のようにすると，折ったとき２つの台形の面がぶつかって折りたためないので，長方形の面を挟んで反対側に折らなければなりません．つまり［S］と［T］は独立していません．この関係はSと合同な台形すべてで成立します．



(1)



(2)　(3)

図４６

図４６(1)をある実山谷系で折ったものがあるとします．その一部分例えば基底［T］の山谷を逆にしようとすると，その部分の折り変えだけで事はおさまらず，Sはもちろんらと合同な台形の山谷をすべて逆にしなくてはなりません．このような基底の非独立性は，本質的には例３.６と同じです．例３.５での基底の独立性は面の幅がたまたま狭かったための特例と理解すべきです．つまり，

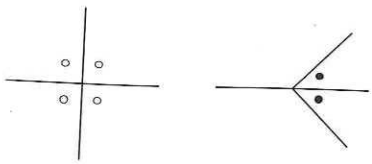
（i）　基底は折り線の山谷が互いに依存し合う最小限の範囲を示すものであり，

(ii)　基底間にも何らかの依存性が常に存在し得る．

と解釈しなくてはなりません．(i)と(ii)は今日の国際社会における国家の関係に似ていると思いませんか．

３．９　正則な頂点と特異な頂点

第３章の最後に山谷問題を難しくする別の要因を説明しましょう．



(1)　(2)

図４７

例3.8　図４７で白丸は９０°，黒丸は４５°を表します．山谷問題を解くための道具はすべて命題３.１を元にしていますが，この命題は隣接３角の大きさに等号がつかない大小関係が成り立つときにのみ有効です．したがって図４７のように同じ大きさの角が隣接する場合には，本章で得られた結果の多くが使えません．そこで，

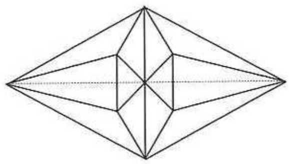
定義3.5　形式的折り線図において，隣接する折り線のなす角に同じ大きさのものがない頂点を**正則な頂点**，正則でない頂点を**特異な頂点**とよぶ．

特異な頂点がある形式的折り線図の山谷問題についての一般論は何もわかっていません．

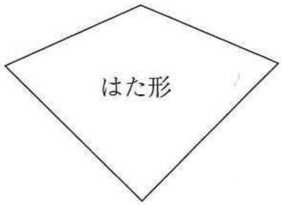
第4章　折り鶴の幾何学

4．1　伏見変形鶴

折り紙の多くは正方形の色紙で折ります．やっこさんや折り鶴はその代表です．ところが折り紙の代表である折り鶴は正方形でなくても折ることができます．たぶん古くから多くの人が気づいていたことでしょうが，菱形に図４８(1)のような折り目をつけて折りたたんでいくと翼の長い折り鶴ができます．これに対して長方形では綺麗な折り鶴はできません．



(1)



(2)

図４８

１つの対角線に関して線対称になっている四角形を**はた形**といいます（図４８(2)）．伏見康治氏は飛ぶ折り鶴研究の中で，はた形用紙で折り鶴を折ることを考えました．後で詳しく述べますが，はた形で折り鶴を折るのは簡単なことではありません．折り方の発見には試行錯誤を超えた数学の助けが必要です．

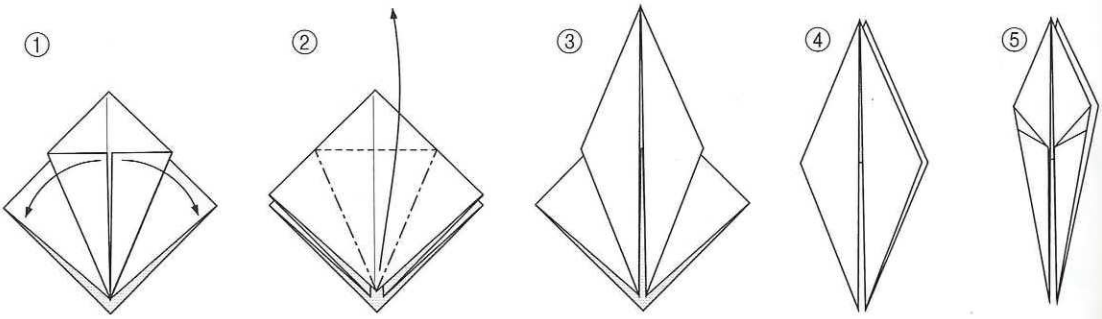


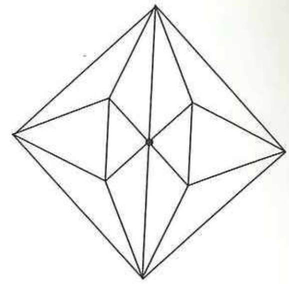
図４９　**鶴の基本形**

図４９は普通の折り鶴を折る工程の一部です．④は**鶴の基本形**とよばれるもので，鳥を折るときなどよく利用されます．④の下のカドは⑤のように半分に細く折られたあと，翼の間に折り上げられて首や尾（脚）になります．図５０(1)(2)はそれぞれ折り鶴と鶴の基本形の展開図です．これらの展開図で折り線が６本集まった中央の点は，折り鶴の背の中心になります．これを**鶴の中心**とよぶことにします．

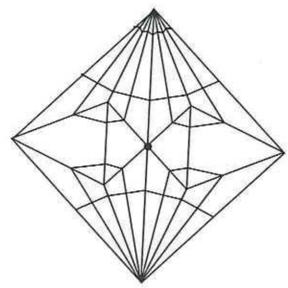
4．2　自然な変形の失敗と前川変形

折り鶴の変形は用紙の形を変えることだけではありません．用紙を正方形のままに対称性を落すことができます．図５１はその折り方です，と言いたいところですが，この図にしたがって折っていっても鶴に仕上げることができません．④のあと首と尾を細くするところまではうまくいきますが，内部に折り込まれた部分（④の点線部分）がひっかかって首と尾が持ち上がらないからです．失敗を承知で図５１の手順にしたがって折ってみてください．ひっかかりの意味がはっきりとわかります．

名作**「悪魔」**や**折紙設計**で知られる前川淳氏はひっかかりを解消した**「新・おりづる」**（文献［Kasa］）を考え出しました．図５２がその折り方です．①②以降は普通の折り鶴とほとんど同じです．前川変形で左右の翼を非対称にすることもできます．



(1)　鶴の基本形の展開図



(2)　折り鶴の展開図

図５０

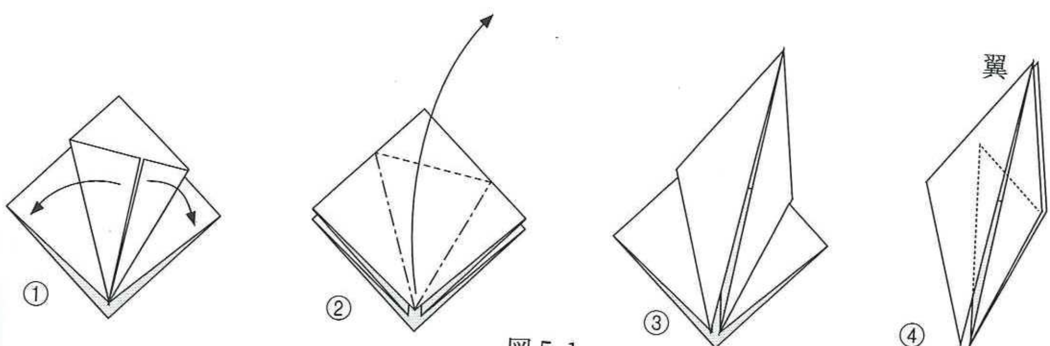


図５１

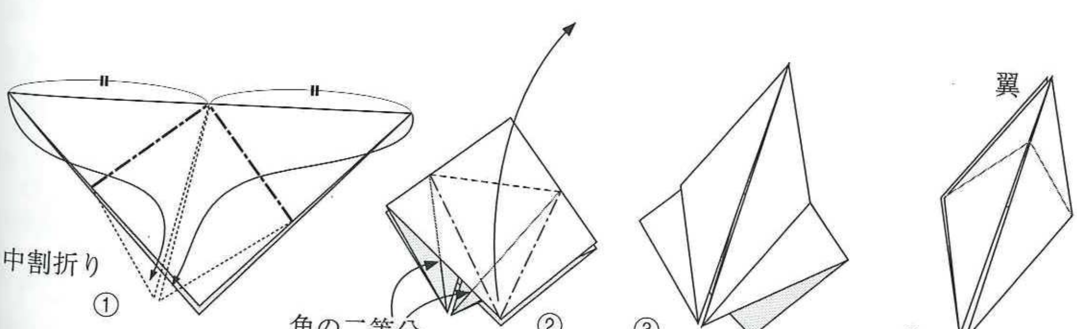


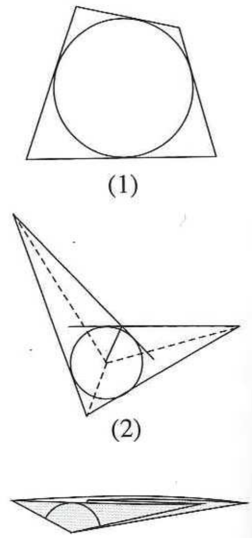
図５２　**前川変形**

4．3　内接円を持つ四辺形

多角形の辺すべてに接する円を**内接円**といいます（図５３(1)）．本節では内接円を持つ四辺形が持つおもしろい性質を説明します．第２章で説明した角二等分折りは四辺形でも考えることができます．ただし三角形の場合と違い，すべての四辺形が角二等分折りできる訳ではありません．特定の四辺形のみが角二等分折り可能です．そしてこのような四辺形は内接を持ち，折り鶴の変形と密接に関係しています．

定義４.１　四辺形が４つの角の二等分線だけを折って平坦に折りたためるとき，この折りたたみを**四辺形の角二等分折り**という．

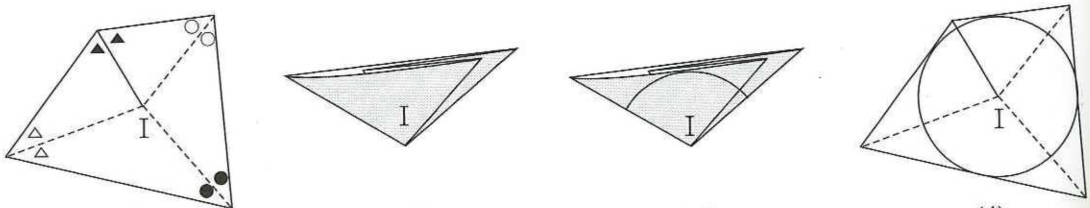
命題４.１　四辺形ＡＢＣＤが角二等分折りできるための必要十分条件は内接円を持つことである．ただし四辺形が凹の場合，内接円と凹んだカドをはさむ辺とは辺の延長線上で接する（図５３）．



(1)　(2)　(3)

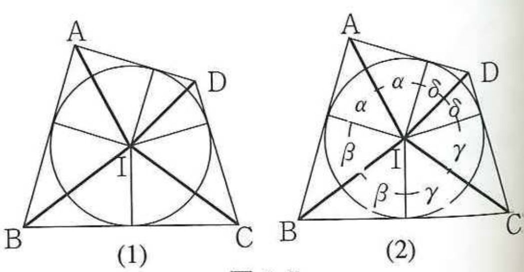
図５３

必要性の証明　定義４.１より折り線つまり角の二等分線は１点で交わります．この点をＩとします（図５４(1)）．角二等分折りにより折り線をはさむ２辺は重なるので，四辺形の４辺は同一直線上に重なります（図５４(2)）．折りたたんだ状態で点Ｉを中心とする円をこの直線と接するように描くと，ひろげた時に４辺に接します．つまり内接円になります．



(1)　(2)　図５４　(3)　(4)

十分性の証明　内接円の中心Ｉから４辺に垂線を下ろすと，斜辺を共有する４組の三角形ができます．垂線は内接円の半径なので，すべて同じ長さです．したがって三角形は組み毎に合同で，各斜辺は角の二等分線になります．さらに図５５(2)において，∠ＡＩＢ＋∠ＣＩＤ$=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(\alpha+\delta)+$



(1)　(2)

図５５

$(\beta+\gamma)=\angle\mathrm{AID}+\angle\mathrm{BIC}$で，$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=360^\circ$なので，$\angle\mathrm{AIB}+\angle\mathrm{CID}=\angle\mathrm{AID}+\angle\mathrm{BIC}=180^\circ$となり，4線分ＩＡ，ＩＢ，ＩＣ，ＩＤは局所平坦条件を満たします．よって四辺形ＡＢＣＤは角二等分折りできます．証明終．

命題4.2　四辺形ＡＢＣＤが内接円を持つための必要十分条件は

（i）　$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$.

（i）の必要性の証明　図５６(1)は内接円を持つ四辺形です．円の中心と接点を線分で結ぶと合同な直角三角形が４組できるので，$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=(p+q)+(s+t)=(q+s)+(t+p)=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$となります．

（i）の十分性の証明　図５７のように３辺に接する円を描き半径をｒとおきます．円の中心Ｉから４辺に垂線をおろすと，三平方の定理より，

（ii）　$x^2+y^2=\mathrm{ID}^2=r^2+t^2$,

（iii）　$x^2+z^2=\mathrm{IC}^2=r^2+s^2$,

を得ます．また仮定（i）より，

（iv）　$y+z=s+t$.

（ii）－（iii）に（iv）を代入すると，

（v）　$y-z=t-s$.

（v）と（iv）から

（vi）　$y=t,\ z=s$.

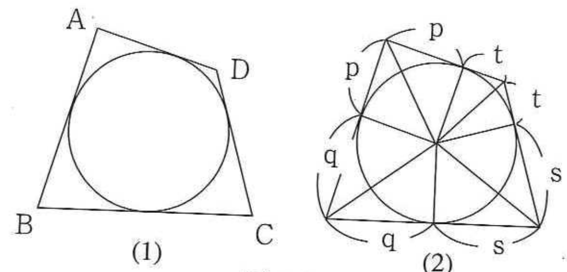


図５６

これを（ii）に代入すると$x=r$となり円が辺ＣＤに接することになります．証明終．この命題は不思議な命題です．四辺形は４辺の長さを決めただけでは形は定まりません．それにもかかわらず，ある状態で内接円を持てば変形させても内接円を持つという性質が失われないことを保障しているからです（図５８）．

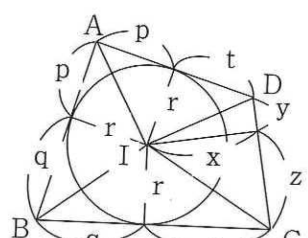


図５７

図５８において３頂点Ｂ，Ａ"，Ｄ"は１直線上に並んでいます．四辺形Ａ"ＢＣＤ"はもはや四辺形ではなく三角形です．四辺形Ａ*ＢＣＤ*は凹四辺形ですが，元の四辺形ＡＢＣＤからの変形の途中に一度だけ三角形が出現します．このような三角形はどう取り扱えばよいでしょうか．数学は例外を嫌います．そこで，

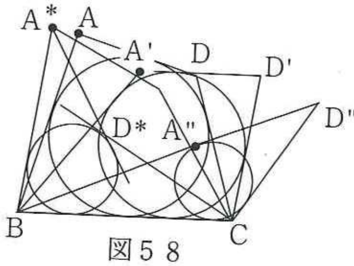


図５８

定義4.2　三角形に対して，内接円との接点の１つを頂点と考えることで四辺形とみなすことを三角形の**四辺形化**という．そして頂点とみなした接点を**平頂点**とよぶ．また四辺形化した三角形と内接円を持つ凹凸四辺形をまとめて**内心四辺形**，三角形を**平内心四辺形**とよぶ．

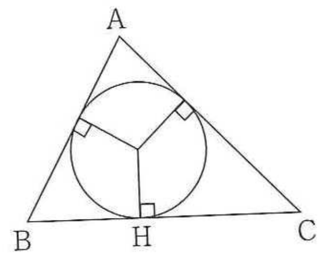


図５９

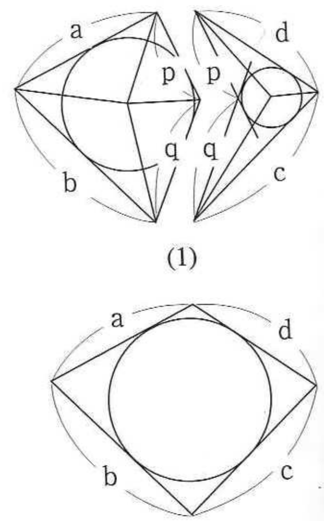
命題4.3　三角形ＡＢＣを内心四辺形とみなすとき，次が成り立つ．

(vii)　第４の頂点すなわち平頂点の候補は３つある，

(viii)　(vii)の３点は内接円の中心から辺に下ろした３垂線の足である，

(ix)　辺ＢＣ上の平頂点ＨはＢＨ＋ＣＡ＝ＡＢ＋ＨＣを満たす．他の２辺でも同様．

図６０のように２辺がぴったり重なる四辺形の貼り合わせを**二辺合併**とよびます．このような貼り合わせに関して，内心四辺形は良い性質を持っています．



(1)
(2)
図６０

命題4.4　内心四辺形の二辺合併はまた内心四辺形になる．

証明　命題4.2より，図６０(1)において，

(x)　$a+q=b+p$，$c+p=d+q$．

２式の和をとると，

(xi)　$a+c=b+d$

となるので命題4.2より内接円を持ちます．証明終．

命題4.4を三角形に適用すると次の命題を得ます．

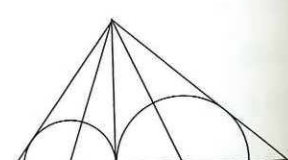


図６１

命題4.5　１辺を共有する２つの三角形に対し，もし両三角形の内心から共有辺に下ろした垂線の足が一致するならば，２つを貼り合わせてできる四辺形は内心四辺形になる（図６１）．

4．4　変形鶴の基本形

準備が整ったので折り鶴変形の本論に入ることにしましょう．

定義4.3　四辺形ＡＢＣＤが図６２(1)のような折り線で平坦に折りたためて，４辺が点Ｋを通る一直線上に重なるとき，図６２(2)を**変形鶴の基本形**，点Ｋを**（変形）鶴の中心**，４辺が重なる直線（図６２(3)）を**（変形鶴の）軸**とよぶ．

４辺と１点が同一直線上に重なるという条件は厳し過ぎるように思えますが，鶴を綺麗に折るには不可欠です．仮に辺ＡＢとＢＣが重ならないとすると，∠ＡＢＣがひろがって間から紙の裏が見えます（図６３(2)）．またＡＢとＢＣが重なってもＫが鶴の軸から外れていると，折り目ＡＫとＣＫのいずれか一方が切れ目ＡＢＣを横切るため，首と尾を折り上げるとき紙がひっかかります（図６３(3)）．

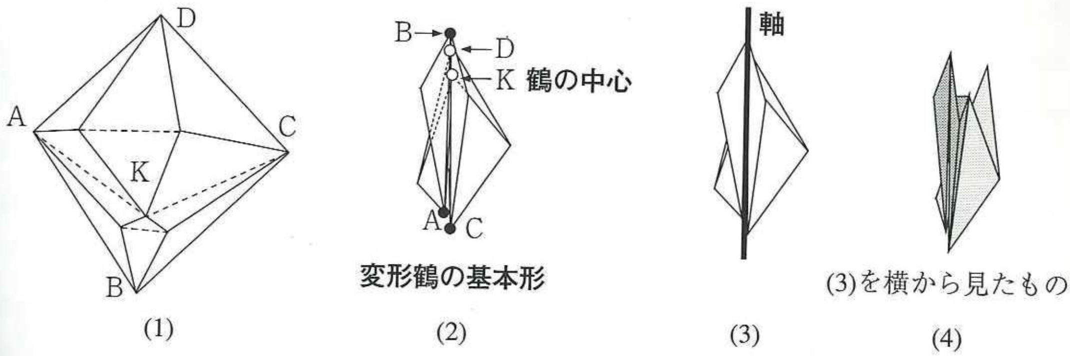


図６２

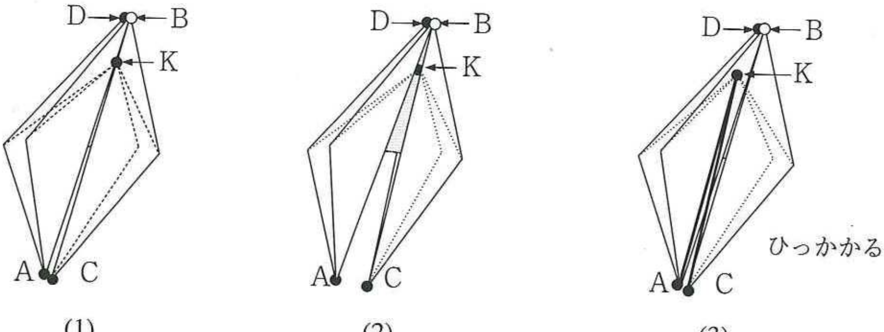


図６３

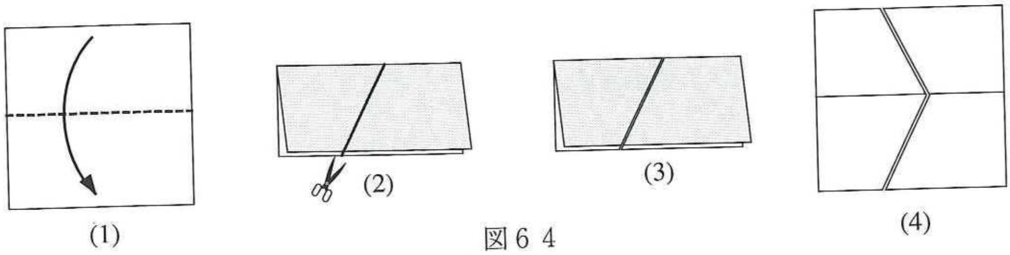


図64

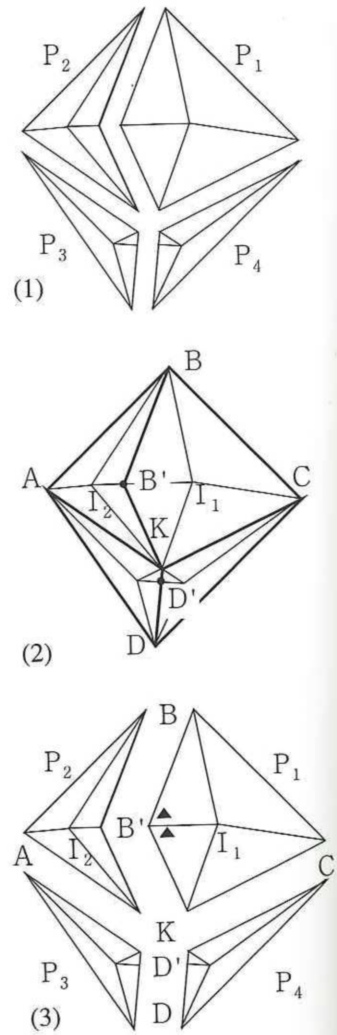


図65

図64は半分に折った紙を直線で切断してからひろげたものです．切り口の線が折り線に関して線対称になっていることがわかります．図65(1)は変形鶴の基本形をその軸で切断してひろげたものです．４つのパーツP_1，P_2，P_3，P_4に分解されます．(2)はこれらを貼り合わせたものです．図64同様，切り口の線が折り線に関して線対称になっています．例えば図65(3)のパーツP_1においてB'BとB'Kは折り線B'I_1に関して線対称です．これは折り線B'I_1が角B'の二等分線になっていることを意味します．他の折り線や他のパーツでも同様です．この結果を命題4.1と組み合わせると次の命題を得ます．

命題4.6　変形鶴の基本形を鶴の軸に沿って切断すると，角二等分折りされた内心四辺形４つに分解される．

図65(2)の四辺形ＡＫＣＢは内心四辺形P_1，P_2の二辺合併なので，命題4.4より，四辺形ＡＫＣＢもまた内心四辺形になります．同様に四辺形ＡＤＣＫも内心四辺形です．四辺形ＡＫＣＢと四辺形ＡＤＣＫは二辺合併できるので，その結果できる四辺形ＡＢＣＤもまた内心四辺形になります．まとめると次の命題を得ます．

命題4.7　変形鶴の基本形を折ることができる用紙形は内心四辺形に限る．

内心四辺形以外の用紙では変形鶴が折れないことがわかりました．では逆に内心四辺形なら必ず変形鶴が折れるのでしょうか．円を描いてそれに外接するように４直線を引けば内心四辺形は簡単に作図できるので，内心四辺形用紙を準備して変形鶴を折ってみてください．

折ってみてくださいと書きましたが，うまく折れた方はほとんどいないはずです．なぜなら命題４.７は，「変形鶴は内心四辺形でなければ折れない．変形鶴の基本形は角二等分折りした４つの内心四辺形の貼り合わせになっている．」を主張しているだけで，与えられた内心四辺形を４つの内心四辺形に分解する方法を示していないからです．

命題４.８　任意の内心四辺形は，内部の１点と２頂点を線分で結ぶことにより，２つの内心四辺形に分割できる．そしてこの内部の点は，内心四辺形の向かい合う２頂点を通り，残り２頂点を焦点とする双曲線上任意の位置にとることができる（図６６(1)）．

証明　命題４.２より，内心四辺形ＡＢＣＤはＡＢ＋ＣＤ＝ＢＣ＋ＤＡを満たしますが，この関係式は，ＡＢ－ＣＢ＝ＡＤ－ＣＤと表せます．そこで次の条件を満たす点Ｘの軌跡を考えます．

（ｉ）ＡＸ－ＣＸ＝ＡＢ－ＣＢ（＝ＡＤ－ＣＤ）．

Ｘ＝ＢとＸ＝Ｄは(ｉ)を満たすので，点Ｘの軌跡はＢとＤを通りＡとＣを焦点に持つ双曲線になります．これを**対鶴曲線**ＢＤとよぶことにします（図６６(2)）．対鶴曲線上に点を任意にとってＰとおきます．点Ｐは(ｉ)を満たすので，ＡＰ－ＣＰ＝ＡＢ－ＣＢつまりＡＰ＋ＣＢ＝ＡＢ＋ＣＰとなります．命題４.２より，この式は四辺形ＡＢＣＰが内心四辺形であることを意味します．四辺形ＡＰＣＤでも同様です．こうして内心四辺形ＡＢＣＤは２つの内心四辺形に分割できます．証明終．

この命題を２つの内心四辺形ＡＢＣＰ，ＡＰＣＤに再度適用すると，内心四辺形による４分割を得ます（図６６(3)）．なお２度目の分割は線分ＰＢ，ＰＤを引くだけでも構いません．この場合は４つの三角形つまり平内心四辺形分割になります．こうして次の命題を得ます．

命題４.９　任意の内心四辺形は，４つの内心四辺形に分割できる．

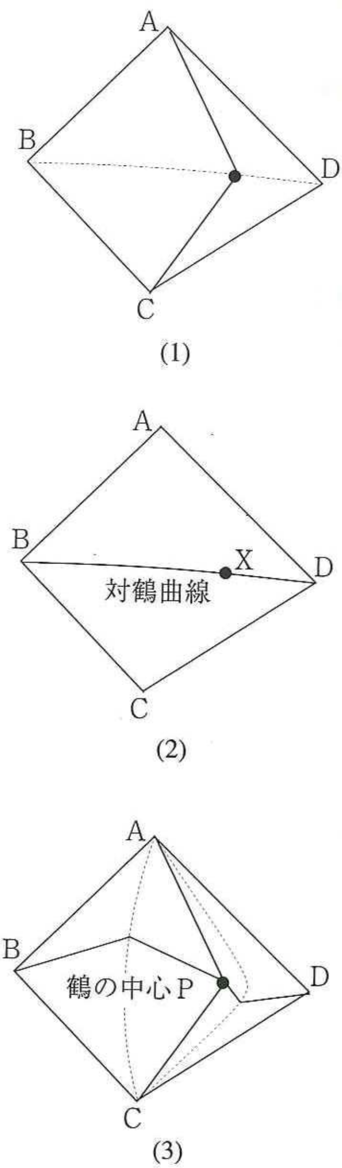


図６６

次に４分割された内心四辺形を実際に折りましょう．

命題４.１０　内心四辺形を２つの内心四辺形に分割したものは，２つの内心四辺形をそれぞれ角二等分折りすることで，全体を平坦に折りたたむことができる．

証明　まず切断します（図６７(1)）．それぞれを角二等分折りすると(2)の太線のように４辺が１直線上に重なります．しかも太線（切り口）の長さが同じなので(3)のように接合できます．こうして切断前の内心四辺形の平坦な折りたたみが得られます．証明終．

図６８(1)は図６７(4)のような内心四辺形を二辺合併できるように並べたもので，太線で接合できます．それぞれを図６７(3)のように折ると図６８(2)のようになって，太線は一直線に重なるので命題４.１０の証明と同様に接合できます．(3)は接合したものつまり変形鶴の基本形です．このように４つの内心四辺形への分解（図６８(4)）から，必ず変形鶴の基本形が得られます．命題４.７とあわせて，

基本定理５　任意の内心四辺形から変形鶴を折ることができる．また変形鶴を折ることができる用紙は内心四辺形に限る．

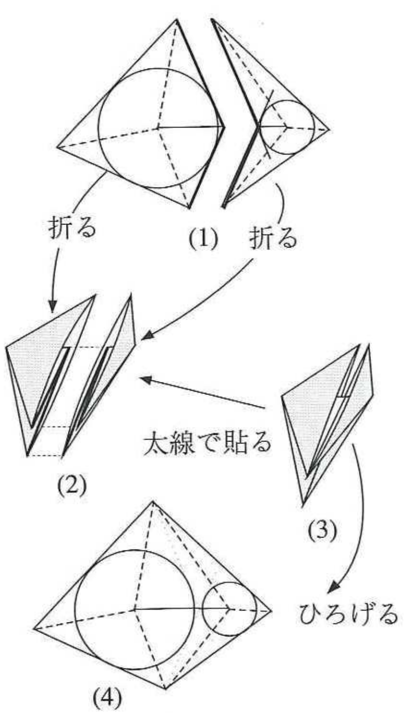


図６７

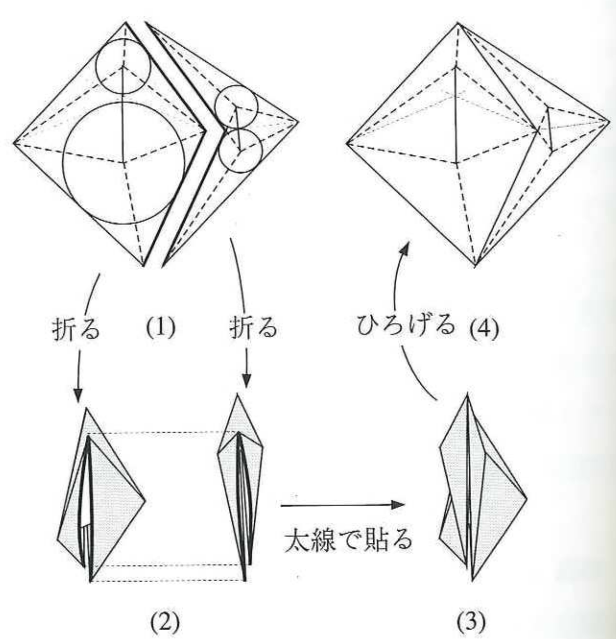


図６８

4.5　鶴心

前節で変形鶴についての重要な定理を得ました．しかしその元になる命題4.8には不満が残ります．

（i）対鶴曲線は2本あるのに，一方しか使っていない，

（ii）本来対等であるべき4頂点が対等に取り扱われていない．

（i）と（ii）が変形にどう反映されているか調べましょう．

例4.1　正方形では，対鶴曲線ＢＤは対角線ＢＤです．鶴の中心Ｐを，図６９(1)のように対角線ＢＤ上一般の位置にとります．(2)は(1)の４分割を元にした変形鶴の基本形の展開図です．破線を谷折り実線を山折りすると，左翼の大きい変形鶴ができます．

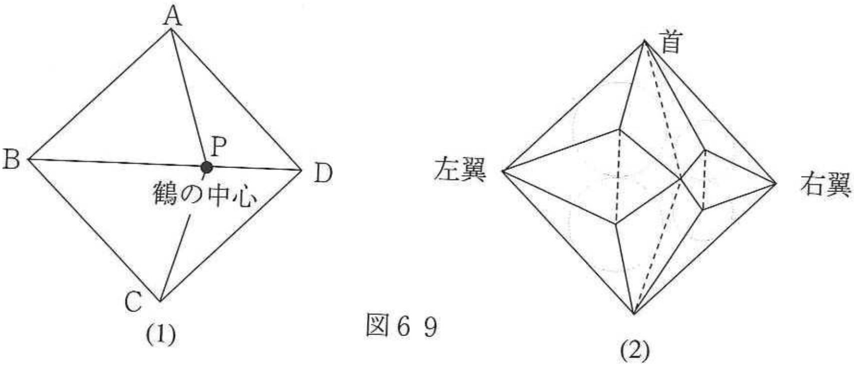


図６９

この例をまねして首の長い変形鶴を作りましょう．図７０(1)の分割から作った(2)の折り線を折ればすぐできるように思えますが，この考えは間違いです．(2)は●印の４点で局所平坦条件が成立しないので，平坦に折りたためません．無理して平坦にしようとすると(3)のような折り目がついて，上下の折り線がつながりません．いずれにしても折りたためません．また(1)の分割を生かした角二等分折りにこだわると，図６９(2)を９０°回転したものになるだけで，首は長くなりません．以上のことから，対鶴曲線上一般の位置に鶴の中心をとると対鶴曲線の両端が翼になることがわかります．

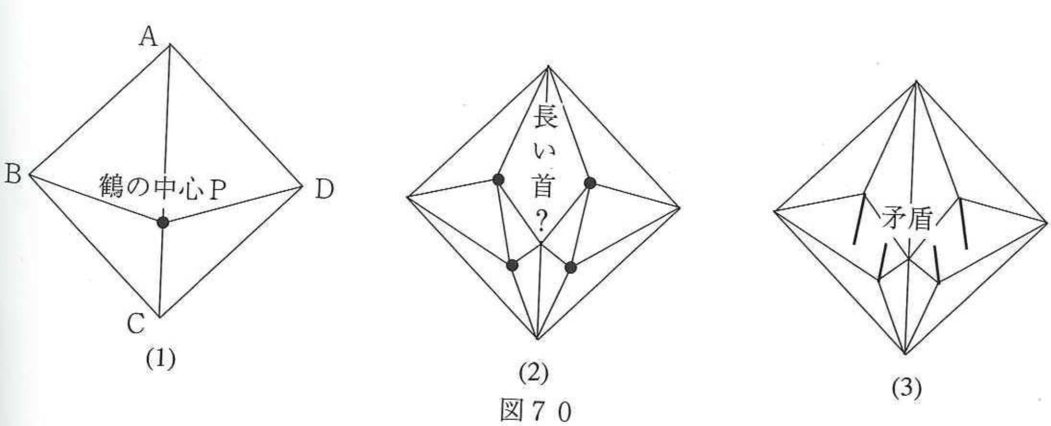
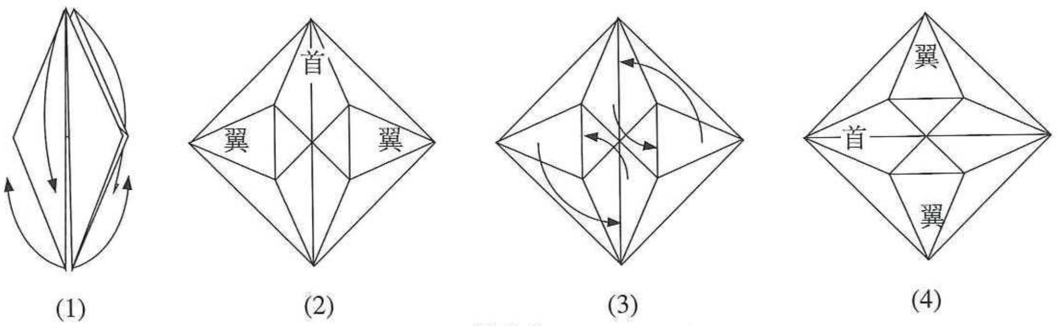


図７０



(1)　(2)　(3)　(4)

図７１

普通の鶴の基本形では，カドの上げ下げにより首尾と翼の位置を入れ換えることができます（図７１(1)）．この性質を**首翼互換性**とよぶことにします．首尾と翼の交換は，展開図では(2)～(4)のような折り線の変化に対応します．図６９(1)や図７０(1)の分割では首尾と翼は交換できませんでしたが，これが頂点の不平等な取り扱い(ｉ)(ⅱ)がもたらした結果です．裏を返せば，４頂点を対等つまり２つの対鶴曲線を対等に取り扱うことで首翼互換性が保たれるはずです．

定義４.４　内心四辺形に対して２つの対鶴曲線の交点を**鶴心**とよぶ．

図７２(2)は鶴心と４頂点を結ぶ線分による平内心四辺形４分割です．鶴心は２つの対鶴曲線上にあるので，対鶴曲線上ＢＤ上の点とみると(5)の展開図を得ます．対鶴曲線上ＡＣ上の点とみると(6)の展開図を得ます．そして(5)と(6)を比べると首尾と翼の入れ替えになっていることがわかります．

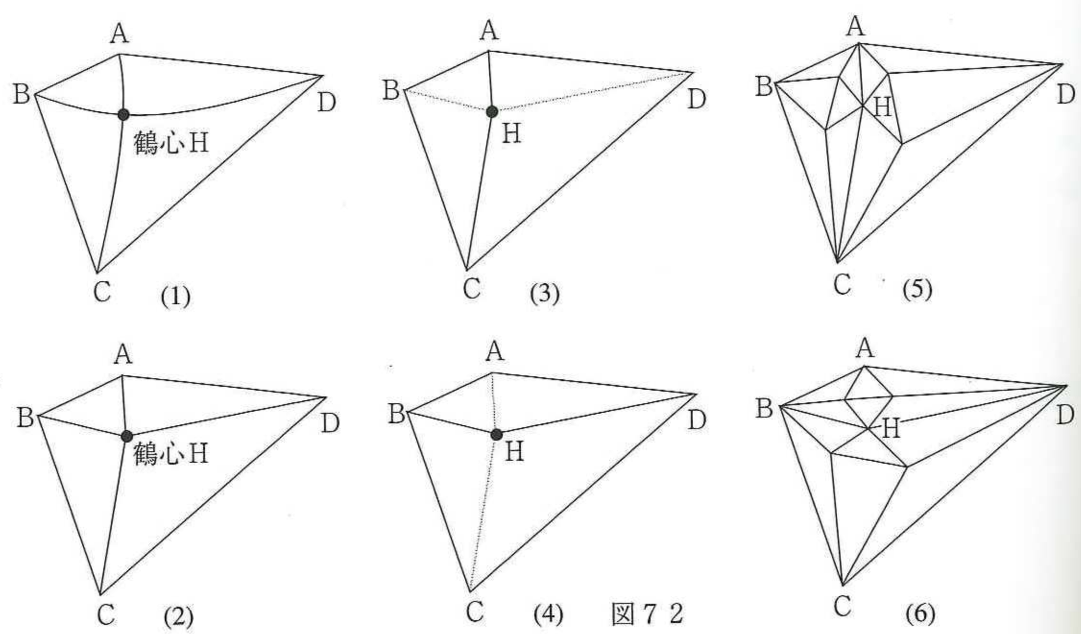


図７２

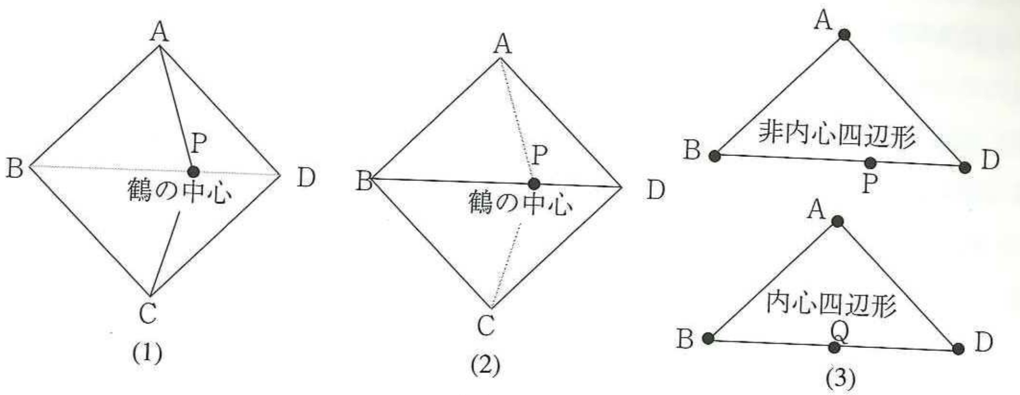


図７３

この結果を踏まえて例4.1（図６９）を見直しましょう．図７３(1)では正方形が左右２つの内心四辺形分割されているのに対して，(2)の上下の三角形は平内心四辺形になっていません．つまり(2)の三角形は内心四辺形ではないので図６７のような折りたたみができず，全体として変形鶴になりません．これがA，Cを翼にできなかった，つまり首翼互換性を持たなかった原因です．以上をまとめると次のようになります．

命題4.１１　内心四辺形ＡＢＣＤの鶴心Ｈや鶴の中心Ｐに対して次が成り立つ．

(iii)　鶴の中心Ｐは対鶴曲線上にあり，対鶴曲線上任意の位置にとることができる，

(iv)　鶴の中心Ｐが対鶴曲線ＢＤ上にあり，Ｐ≠鶴心Ｈの場合は，四辺形ＡＢＣＰ，ＣＤＡＰは内心四辺形であるが，四辺形ＡＢＨＤ，ＣＤＨＢは内心四辺形ではない．鶴の中心Ｐが対鶴曲線ＡＣ上にある場合も同様である．

(ｖ)　四辺形ＡＢＣＨ，ＣＤＡＨ，ＡＢＨＤ，ＣＤＨＢはすべて内心四辺形である．

(vi)　首翼互換性のある変形鶴の基本形は，４三角形ＡＢＨ，ＢＣＨ，ＣＤＨ，ＤＡＨを角二等分折りすることで得られる．

4．6 伏見変形，Justin変形，前川変形との関係

まず**伏見変形**，つまりはた形用紙による変形鶴との関係を説明します．

はた形は命題４.２の条件(ｉ)を満たしているので内心四辺形です．伏見変形鶴の基本形は，はた形に命題４.１１(ｖ)を適用したものです（図７４）．

伏見康治氏は紙を折って鶴心を作図する方法を発見しました（図７４(2)）．

① 対称軸で二分された三角形をそれぞれ角二等分折りして内心を作図する．

② 三角形の内心を結ぶ折り目をつける．（①で自動的につく）

③ ②の折り目と対称軸との交点が鶴心になる．

①～③で鶴心が作図できることを本書流に証明しましょう．対称軸ＡＣは対鶴曲線なので鶴心はこの線分上にあります（図７４(3)）．命題４.１１(ｖ)より三角形ＡＢＣＨ，ＡＤＣＨはともに平内心四辺形つまりＨは両三角形の平頂点ですが，命題４.３(viii)より，平頂点は両三角形の内心から対称軸に下ろした垂線の足になります．証明終．

注意：対角線の交点が鶴心となるのは菱形だけです．はた形の鶴心作図法は，内接円を持つ四辺形の性質を熟知して初めてその本質がわかるものだったのです．

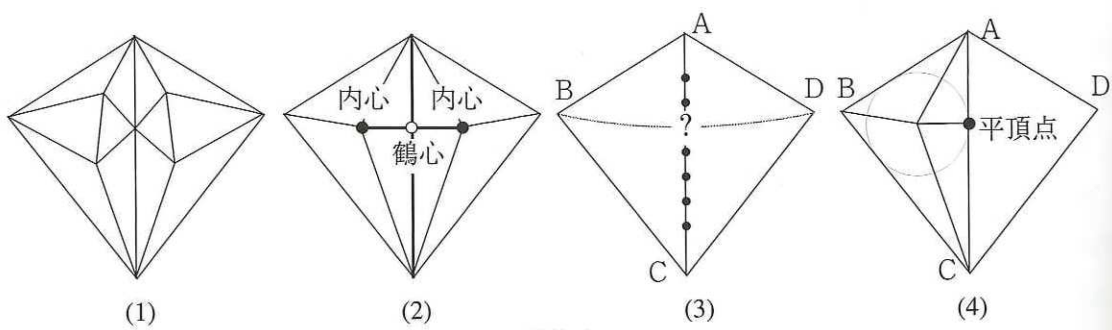


図７４

フランスのJacques Justin 氏は伏見変形を発展させて，内接円を持つ凸四辺形による首翼互換性のある変形鶴を初めて考え出しました．これを**Justin変形**とよぶことにします．Justin変形は命題４.１１(ｖ)(vi)を凸内心四辺形に制限したものです．つまり図７５のように凸内心四辺形を，その鶴心と４頂点を結ぶ線分で４つの三角形に分割して，それぞれを角二等分折りしたものです．命題４.１１と比べるとJustin氏の結果は折り鶴の変形理論の一部という事になりますが，よくまとまった美しい成果です．

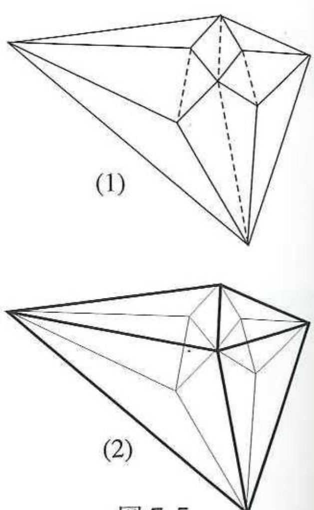
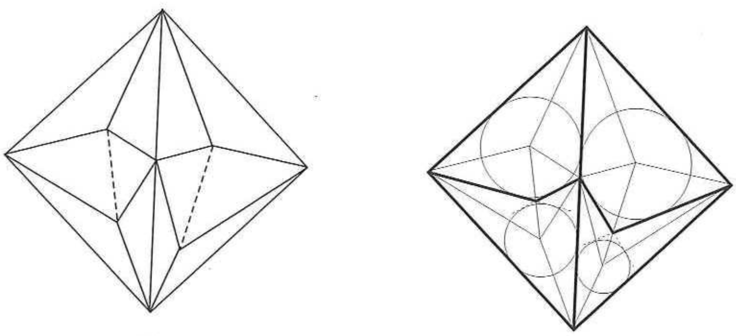


図７５

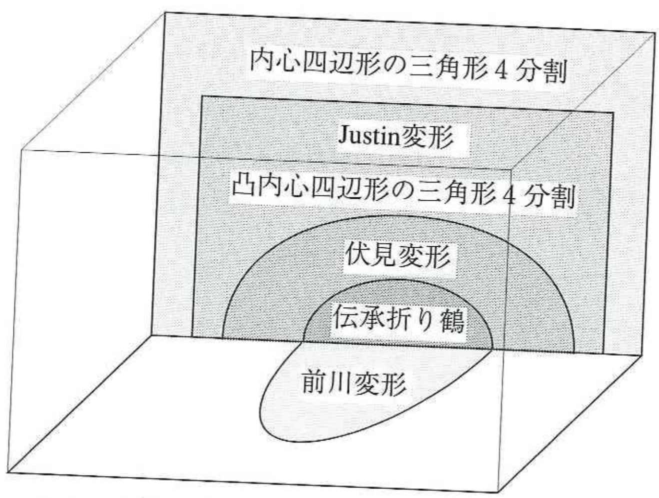
最後に**前川変形**を説明します．前川変形では紙の形は正方形です．鶴の中心は，Justin変形同様，鶴心にとっています．しかし首翼互換性はありません．これだけだとJustin変形に優る点がないように思えますが，そうではありません．

図７６(1)は前川変形鶴の基本形の展開図です．この図からはわかりませんが，伏見－Justin変形にはなかった凹凸内心四辺形による４分割が隠されています（図７６(2)）．前川氏は背後にある内心四辺形に気づかないままに，優れた折り紙センスで伏見氏やJustin氏が見逃した変形を発見したのです．前川変形は正方形に対するものですが，内心四辺形に対しても考えることができます．そしてこの変形は「鶴心を頂点とする内心四辺形への４分割」と表現できます．

以上を模式的に示すと図７７のようになります．図７７の垂直面でわかるように，Justin変形の自然な拡張は，凸という制限を取りはずして凹内心四辺形や平内心四辺形（三角形）にひろげることだけです．これに対して前川変形は次元が違っていて，垂直面に描かれたすべての変形に対して等しく行うことができます．



(1)　図７６　(2)



内心四辺形の内心四辺形４分割（命題４．１１）

図７７

4．7　隠れているもうひとつの変形

命題4.11には書いていますが，図77では見えにくくなった変形があります．それは鶴の中心を鶴心以外の位置にずらすことです．ずらすといっても好き勝手に動かすことはできません．命題4.11で述べたように対鶴曲線上だけです．

これに前節で述べたことを加味して命題4.11をまとめ直すと次の定理を得ます．

基本定理6（変形鶴）

(i)　独立した3種類の変形がある，

　ア．用紙形の変形（伏見－Justin変形）

　イ．鶴の中心の移動（鶴の中心≠鶴心）

　ウ．鶴の中心＝鶴心，内心四辺形2分割から4分割段階での変形（一般化した前川変形）

(ii)　変形折り鶴が折れる ⇔ 用紙が内心四辺形，

(iii)　変形鶴の基本形は4分割してできた内心四辺形をそれぞれ角二等分折りしたものである，

(iv)　(iii)の4内心四辺形の共有点つまり鶴の中心は対鶴曲線上任意の位置にとれる，

(v)　対鶴曲線は，用紙の向かい合う2頂点を通り，残る2頂点を焦点とする双曲線である，

(vi)　鶴心は2つの対鶴曲線の交点である，

(vii)　首翼互換性のある変形鶴は鶴心と4頂点を結ぶ線分による三角形4分割から得られる．

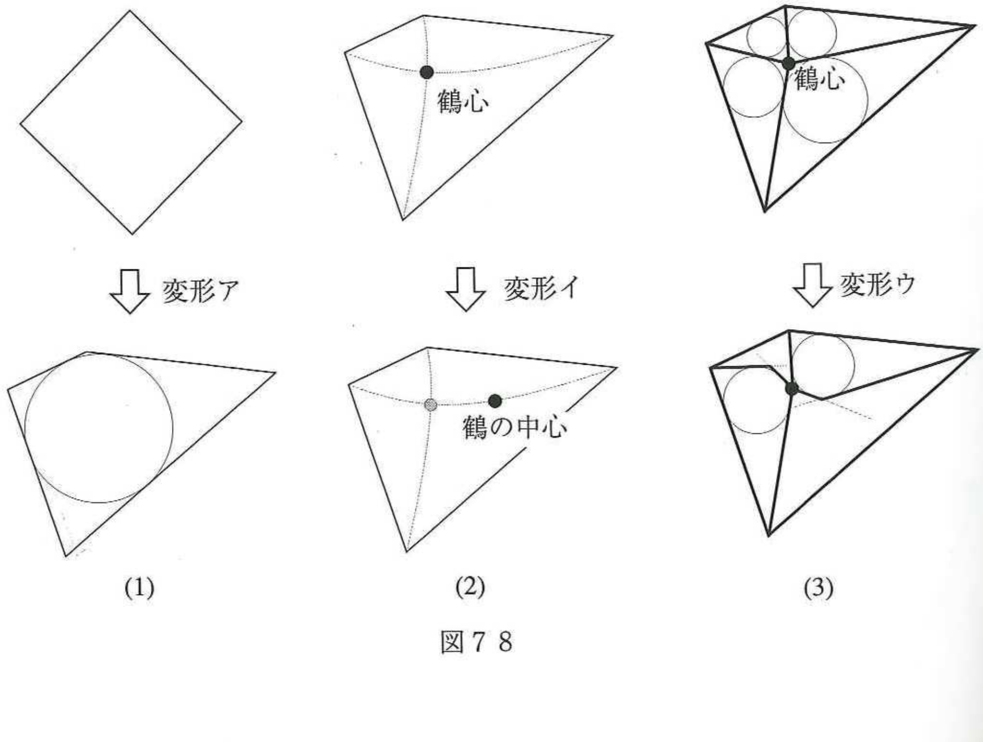


図78

４．８　内心四辺形再考

局所平坦条件を満たす４本の折り線で紙を平坦に折りたたみ，まっすぐ切ってひろげると内心四辺形ができます．このように変形鶴を折るための四辺形は簡単に作ることができます．切り方を変えると内心四辺形も変化します．図７９(4)の凸内心四辺形（はた形）Ｓと平内心四辺形（三角形）Ｔで変形鶴を折る方法は６節で述べた通りです．切断Ｓを切断Ｒに近づけていくと内心四辺形は縦長になっていきますが，切断Ｒになった瞬間に下の端が開きます．切断Ｑも同様です．

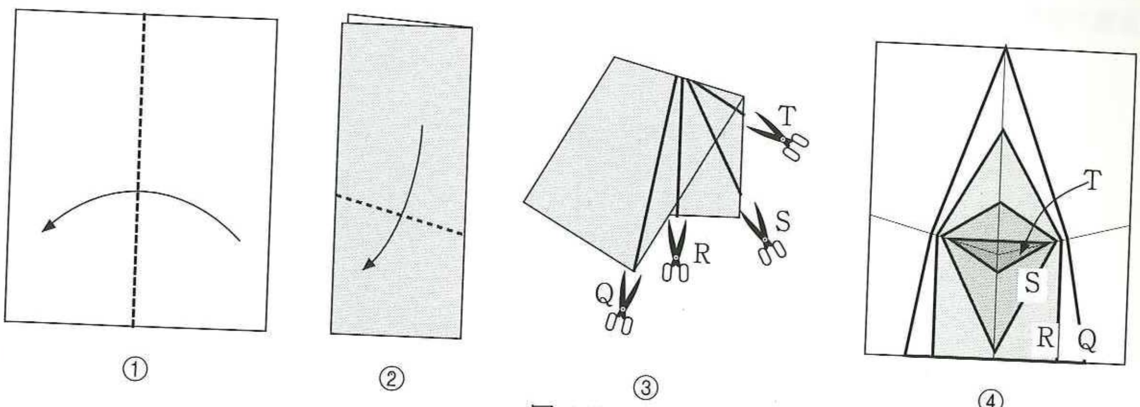


図７９

開いた四辺形Ｑ，Ｒは図８０のように内接円を持ちます．開いていても，内心四辺形とみなしたくなります．変形鶴は折れるでしょうか．はた形の場合を真似してＲで鶴を折ってみましょう．

① 対称軸で二分した一方を角二等分折りして鶴心（?）を求める．

② この点と４頂点を結んで４つの三角形に分割する．

③④ 各三角形を角二等分折りする．

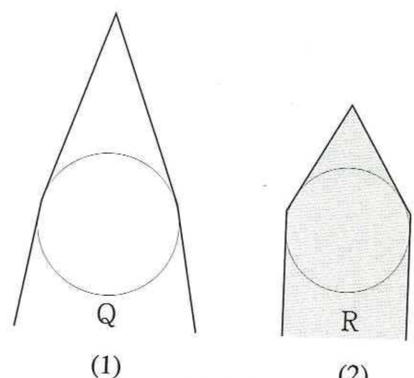


図８０

こうして得られる折り線図は実際に折りたたむことができて，③からは両翼対称で無限に伸びる尾を持つ変形鶴，④からは前後対称で片方の翼が無限に伸びる変形鶴ができます．

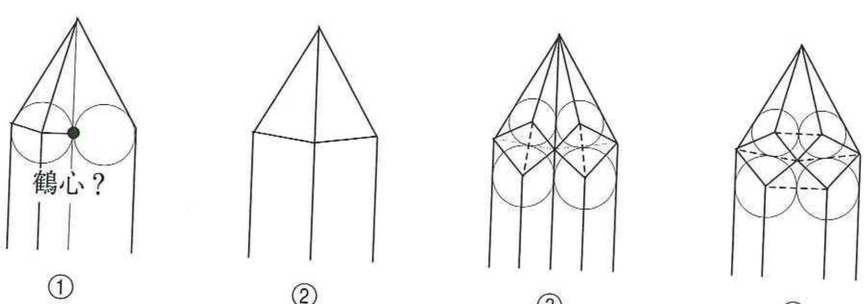


図８１

このように内心四辺形を広く解釈すると変った変形鶴ができます．図８２は用紙例で一見すると四辺形に見えませんが，●印の頂点で区切ることで四辺形になります．また内接円が必ずしも４辺と接していないようにも見えます．しかし，例えば図８２(1)では，端点Ｐで辺ａ，ｂと，端点Ｑで辺ｃ，ｄと接しています．つまり内心四辺形です．他の四辺形も同様に内心四辺形です．

興味ある方はこれら**開いた内心四辺形**で変形鶴を折ってみてください．まずは伏見氏の鶴心作図法が適用できる**開いたはた形**で折ってみてください．図８３の開いた不等辺内心四辺形で折る首翼互換性のない変形鶴の基本形の折り線図も参考にしてください．

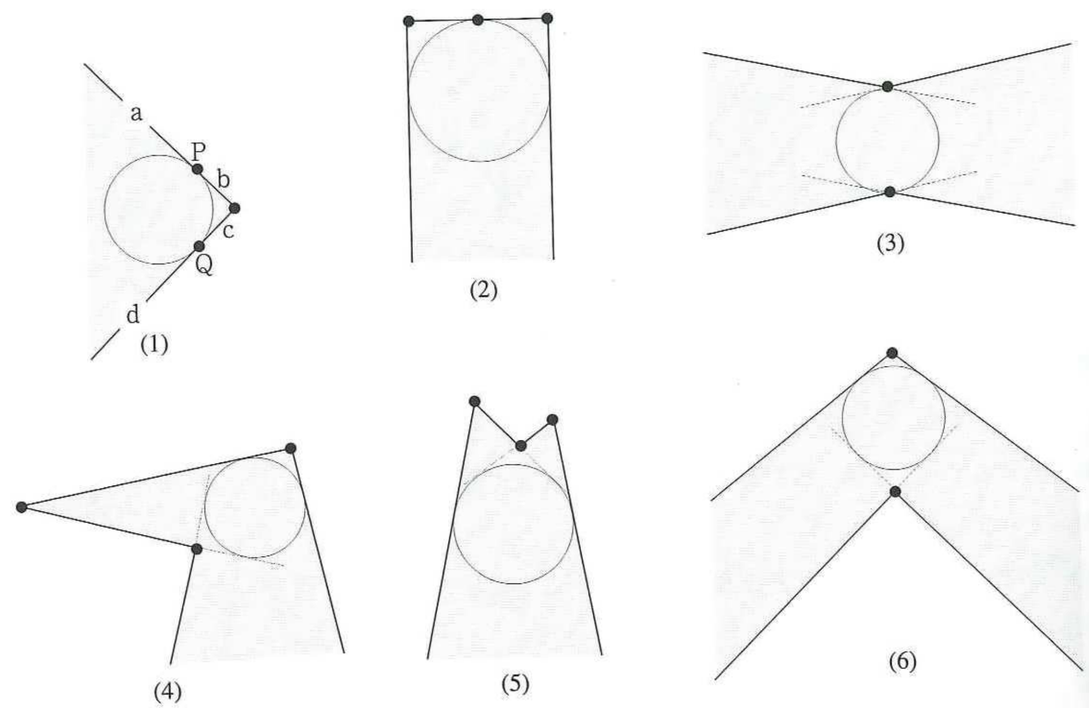


図８２

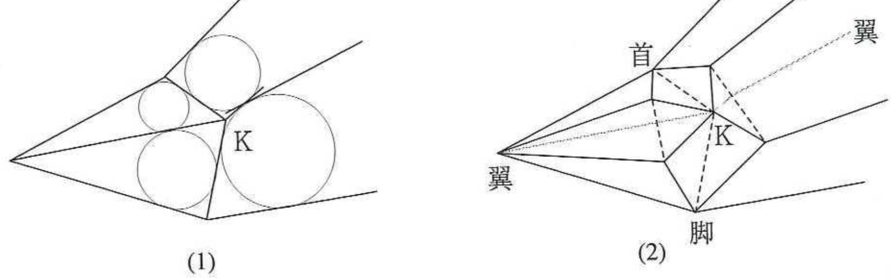


図８３

補足4.1　開いた内心四辺形は，閉じた内心四辺形同様，二辺合併が再び内心四辺形になるという性質（命題4.4）を持っています（図８４）．

補足4.2　開いた内心四辺形の対鶴曲線は，双曲線以外に放物線，楕円，円，直線があります．

補足4.3　開いた内心四辺形を含む変形鶴の関係は図８５のようになります．

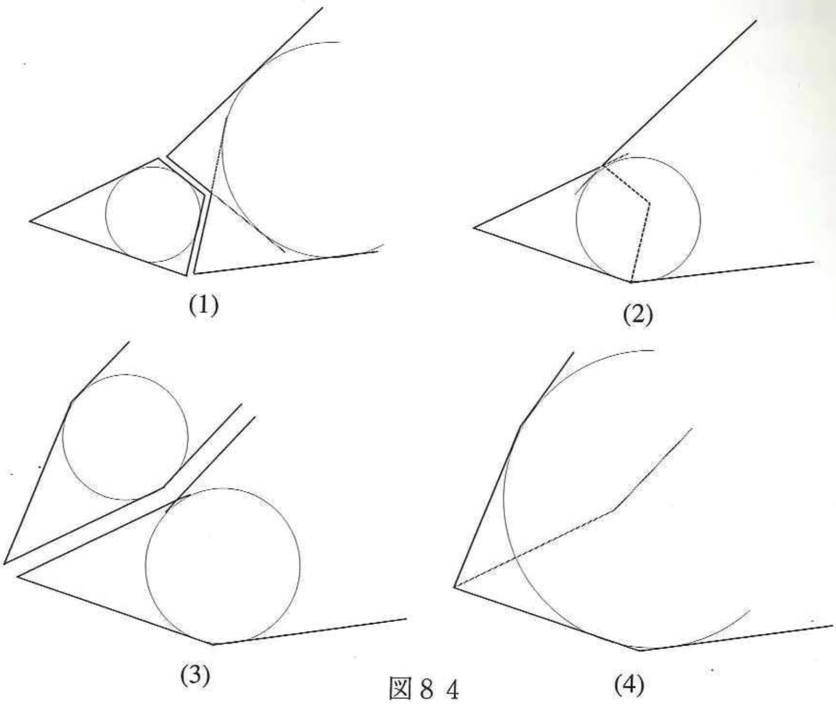
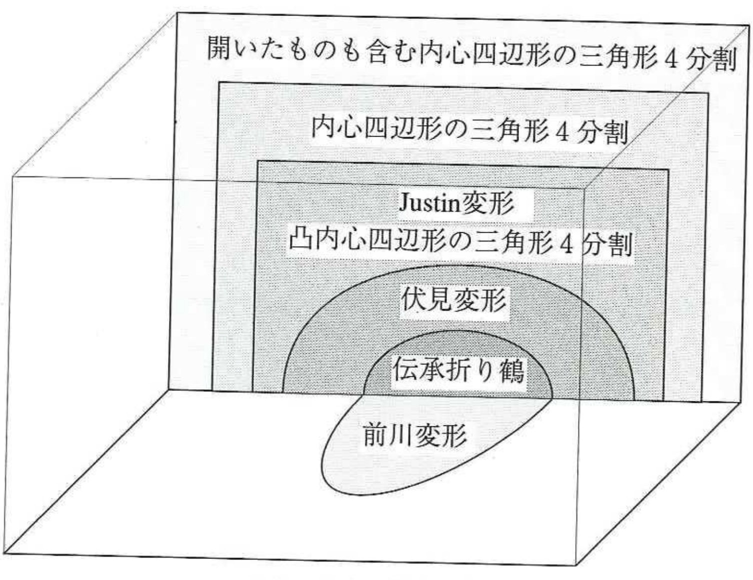


図８４



最終（？）変形鶴関係図

図８５

4．9　内心四辺形再々考

図８６は図８２(1)の開いた内心四辺形を変化させたものです．辺のなす角度が１８０°以上になると(4)のような凹四辺形になりますが，これは(5)のように解釈するほうが自然です．

(5)は(2)とまったく同じものです．これは反対側（外側）でも鶴が折れることを意味します．この考え方を発展させると，図８７❹のように閉じた内心四辺形用紙の外側でも変形鶴を折ってよいことになります．

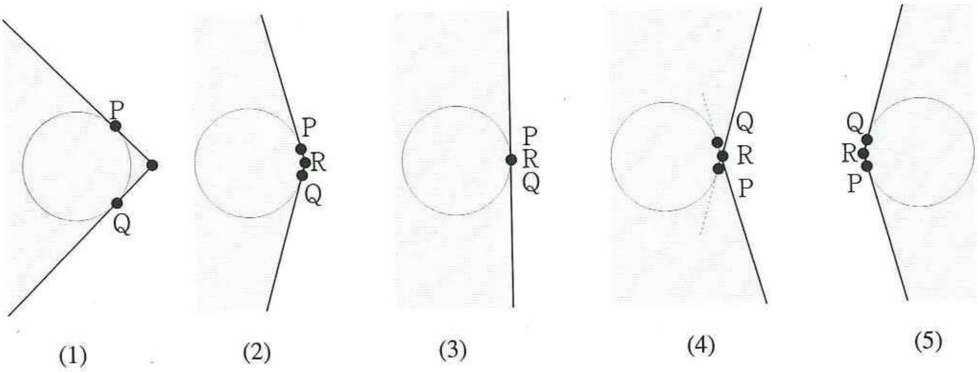


図８６

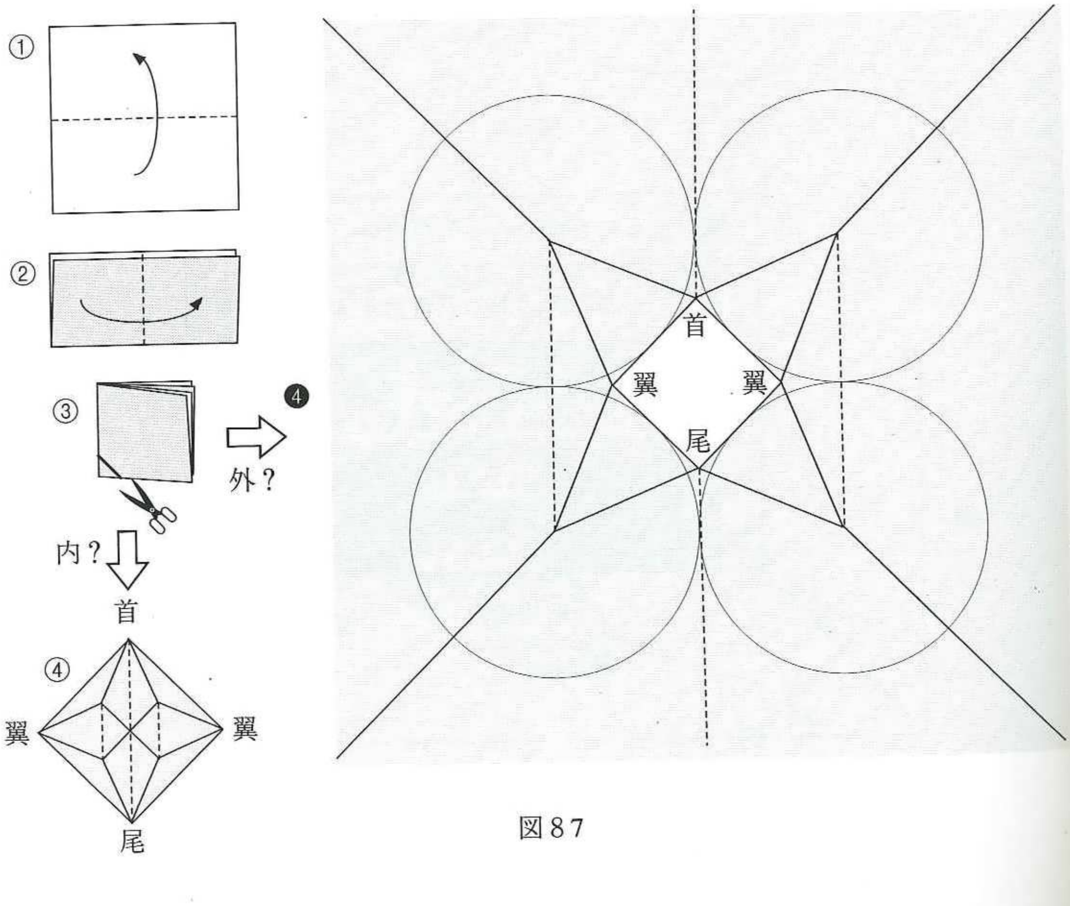


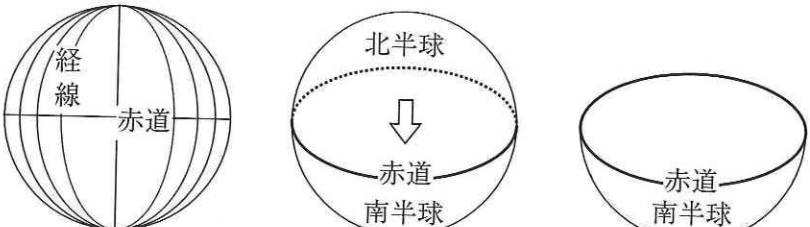
図８７

４．１０　球面変形鶴

前節で内心四辺形の外側が変形鶴の用紙となりうることを説明しましたが，図８７❹の変形鶴は余にも奇妙で，図８６のような流れがあっても受け入れ難いものです．しかし外側で鶴を折ろうとする根拠は図８６以外にもあります．

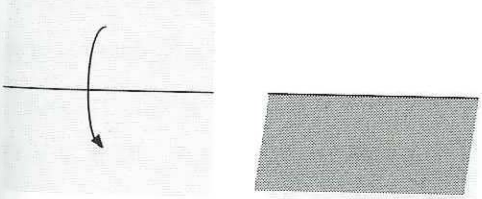
紙風船のような球面の折り紙を考えることができます（文献［Kawa1］）．普通の折り紙で折り線は直線ですが，球面で直線の役割をするのは**大円**（地球表面を球面とみなすとき，大円は赤道や経線など）です．したがって赤道で折って北半球表面を南半球表面に重ねることは，球面のぴたっとした折りたたみになります（図８８）．

球面全体を大円で半分に折ることは，無限に広い平面を１本の直線に沿って半分に折ることに相当します．普通の折り紙は正方形の色紙を使うので，これに対応する球面の折り紙は，まず球面上の四角形（**球面四角形**）を作ることから始まります．球面四辺形の各辺は大円の一部（**大円弧**）なので，図９０のように４つの大円で球面を区切ると球面四角形ができます．図９０(2)は半球で，周上に４頂点を加えて四辺形とみなすことができます．この半球面は普通の折り紙用紙つまり正方形に相当します．



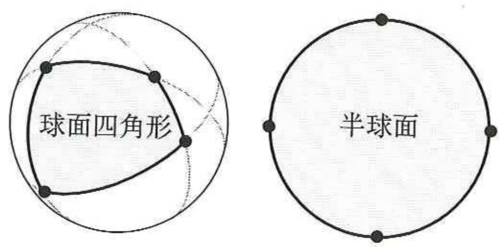
(1)　(2)　(3)

図８８



(1)　(2)

図８９



(1)　(2)

図９０

図９１は図９０(2)をもとにした球面鶴の基本形で，球面上の変形鶴でもっとも対称性の高いものです．

図９１を北極方向から見た北半球としましょう．前節で内心四辺形の外側で鶴を折ることを考えましたが，北半球の外側は南半球なので，図９１の外側で折る鶴はまた図９１とまったく同じものになります．このように球面上では，用紙の外側で鶴を折ることは自然に受け入れられます．

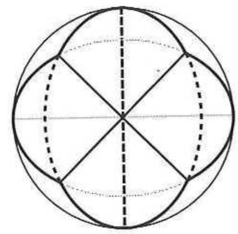
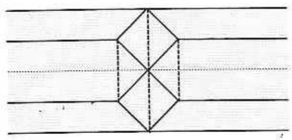


図９１

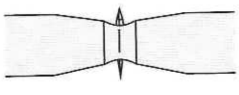
４．１１ 変形鶴の応用

最後に変形折り鶴の応用例を３つ紹介します．図９２(2)は図８４(3)(4)のように二箇所開いた内心四辺形による変形鶴です．ただし鶴と言っても首や尾が極端に短いので，亀にしか見えません．名づけて**亀鶴**です．鶴と亀で２倍おめでたい縁起の良い鶴です．亀鶴は(3)のようにつなぐことができます．

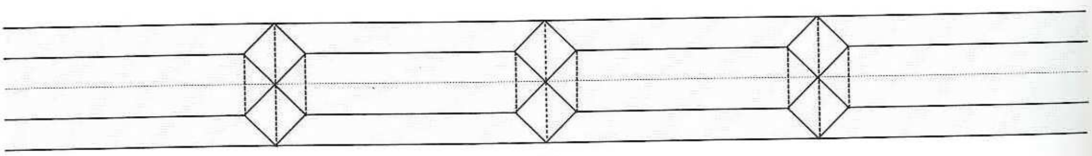
図９３は図８２(6)のような開いた四辺形による変形鶴の基本形（首翼互換性あり）を２つつないだものです．このように変形鶴には，つなぐ楽しみ方もあります．



(1)



(2)



(3)

図９２

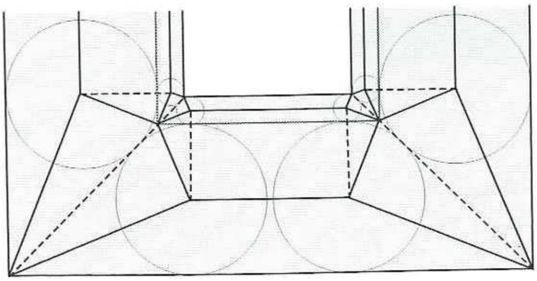


図９３

図９４は普通の折り鶴と図８２(1)を組み合わせたもので，エンジンの役目をする小型の鶴が両翼についた**飛行機鶴**です．同じ技法で首や尾の途中に小さな鶴を取りつけることも可能です．

練習　はた形で図９４のような飛行機鶴を折ってください．完成すると後方に翼が寄ったコンコルドのような飛行機鶴になります．

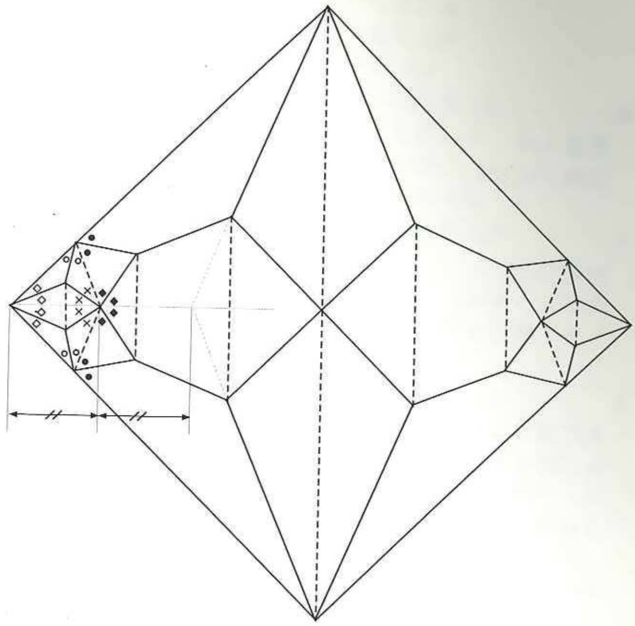


図９４

参考文献

［F］藤本修三・西脇正巳，『創造する折り紙遊びへの招待』，朝日カルチャーセンター(1982).

［Husi］伏見康治・伏見満枝，『折り紙の幾何学』，日本評論社(1979).

［Huzi］H.Huzita(Editor),“ORIGAMI SCIENCE and TECHNOLOGY”,Proceedings of the first international Meeting of Origami Science and Technology (1990).

［J］J. Justin, Mathematical Remarks about Origami Bases, Symmetry : Culture and Science,Vol.5, No.2(1994),153-165.

［Kasa］笠原邦彦著・前川淳作，『ビバ・おりがみ』，サンリオ(1983).

［Kawa1］川崎敏和，２次元球面の平坦折り紙について，佐世保工業高等専門学校研究報告，第29号(1992),49-61.

［Kawa2］川崎敏和，平坦折り紙胞体分割の組織的構成法の拡張とその応用　-折り鶴変形理論-，佐世保工業高等専門学校研究報告，第32号(1995)，29-58.

［Mi］K.Miura(Editor),“ORIGAMI SCIENCE & ART ”,Proceedings of the second international Meeting of Origami Science and Scientific Origami (1997).

［Mo］桃谷好英，『折り紙入門』，西東社 (1974).

［U］柳宗理監修・編著『花紋折り内山光弘の世界』，芸艸堂

索　　　　引

あとがき

折り紙の楽しみの一つに名作を見ることがあります．きれいだな，形がよいな，一つ欲しいな，と感想は様々でしょう．

筆者の願いは，折ってみたい→たくさん折りたい→人に折り方を教えたい，と思ってもらえるような折り紙を生みだすことです．この基準で読者の皆様のおめがねにかなうものがあったならば嬉しい限りです．

折り紙の幾何学では，筆者が「折り紙とは何か？」を知りたくて研究した結果を紹介しました．第４章の折り鶴の幾何学は「折り鶴とは何か？」に答えたものです．この分野の研究は今も続いています．最終（？）変形鶴関係図（１５５ページ図８５）は，実は最終ではありません．研究がまとまって紹介できる時が来ればと思っています．

最後になりましたが，本書への作品掲載を快く承諾していただいた津田良夫氏，西川誠司氏にお礼を申しあげます．また起案から７年．森北出版の菅原義一氏，河合一氏，小林巧次郎氏には，原稿作成が遅々として進まなかったためご心配と迷惑をおかけしました．心よりお詫びするとともに，辛抱強くお待ちいただきましたことに感謝いたします．

１９９８年7月

著　者

著者略歴
川崎　敏和（かわさき　としかず Toshikazu Kawasaki）
１９５５年　長崎県島原に生まれる.
１９８５年　九州大学大学院博士課程単位取得
退学.
現　　在　佐世保工業高等専門学校助教授
博士（数理学）
〒857-1193
長崎県佐世保市沖新町1-1
☎0956-34-8443

ブラジルでの折り紙講習（1989年、国際交流基金），第１，２回折り紙の科学国際会議（1989年イタリア，1994年大津），折り紙教育とセラピー国際会議（1991年イギリス）他海外との折り紙交流を積極的に行っている．代表作「バラ」は“KAWASAKI ROSE”として世界的に知られている．折り鶴の変形理論で学位を取得。世界初の折り紙博士.

バラと折り紙と数学と

1998年９月１日　第１版第１刷発行
2000年10月31日　第１版第４刷発行

著　　者　川崎敏和
発 行 者　森北　肇
発 行 所　森北出版株式会社
東京都千代田区富士見1-4-11（〒102-0071）
電話　03-3265-8341　FAX　03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/
自然科学書協会・工学書協会　会員
Ⓡ<日本複写権センター委託出版物・特別扱い>

落丁・乱丁本はお取替えいたします　印刷/㈱ディグ・製本/小高製本

Printed in Japan／ISBN 4-627-01671-9